

# 位相的データ解析による ニューラルネットワークの構造分析

石原 優生<sup>1</sup> 佐藤 好久<sup>2</sup>

**概要:** 情報技術の発展に伴い、膨大なデータから有益な情報を抽出するための高度な解析手法が求められている。位相的データ解析 (TDA) はデータの分布モデルを仮定する必要がないため、多様なデータに対して適用可能な解析手法である。近年、ニューラルネットワークは高い性能を示す一方で、その内部構造や学習過程は解釈が困難である。本研究では、TDA を用いてニューラルネットワークの内部表現構造を解析する。ネットワークの各層における活性化値を点集合として捉え TDA を行うことで、Betti 数や我々が提案した位相的特徴量を抽出し、層構造が内部表現に与える影響を定量的に明らかにする。

**キーワード:** 情報数学, 確率・統計, ニューラルネットワーク

## Structural analysis of neural networks using topological data analysis

YUSEI ISHIHARA<sup>1</sup> YOSHIHISA SATO<sup>2</sup>

**Abstract:** Advances in information technology have increased the demand for analytical methods capable of extracting meaningful information from massive datasets. Topological data analysis (TDA) is a powerful approach that can be applied to diverse data without assuming specific distributions. Although neural networks have achieved remarkable performance, their internal representations remain difficult to interpret. In this paper, we apply TDA to analyze the internal representation structures of neural networks. By treating the activation values in each layer as point clouds and performing TDA, we extract Betti numbers and our proposed topological features to quantitatively clarify the effects of layer structures on internal representations.

**Keywords:** Information Mathematics, Probability & Statistics, Neural Network

### 1. はじめに

情報技術の発展に伴い、身の回りには膨大なデータが溢れている。これらのデータの中から有益な情報を抽出するためのデータ解析手法には、さらなる高度化が求められている。本論文では、データ解析の1つの手法である位相的データ解析 (Topological Data Analysis) に着目しニューラルネットワークの構造分析を行う。

近年、深層学習をはじめとするニューラルネットワークは、画像認識や自然言語処理など多様な分野において高い

性能を示している。その一方で、ニューラルネットワークの内部構造や学習過程はブラックボックス的であり、なぜ高い性能が得られるのか、また層構造や学習段階によって内部表現がどのように変化しているのかについては、十分に理解されているとは言い難い。

位相的データ解析 (以下 TDA) は位相幾何学を基盤とし、データの「形」に着目する解析手法である。従来のデータ解析では、解析対象のデータを既知の分布モデルに当てはめて解析を行うことが一般的であり、分布モデルを仮定できないデータに対しては解析が困難であるという課題があった。これに対し、TDA は特定の分布モデルを仮定す

<sup>1</sup> 九州工業大学大学院情報工学府情報創成工学専攻

<sup>2</sup> 九州工業大学大学院情報工学府情報創成工学専攻 知能情報工学研究系

る必要がなく、高次元かつ複雑な構造をもつデータに対しても適用可能であることから、ニューラルネットワーク内部の表現解析において有効な手法であると考えられる。

本研究の目的は、TDA の手法を用いてニューラルネットワーク内部の表現構造を定量的に解析し、その特徴および変化を明らかにすることである。特に、各層における活性化値 (activation) を点集合として捉え、パーシステンスホモロジーを適用することで、Betti 数, numpl, sumpl[1,2] といった位相的特徴量を抽出する。これらの指標を用いて、ネットワークの層構造、学習の進行、およびハイパーパラメータの違いが内部表現に与える影響を分析する。

## 2. ニューラルネットワーク

ニューラルネットワークは、入力層、中間層 (隠れ層)、出力層から構成される機械学習モデルであり、各層において線形変換と非線形変換を組み合わせた処理を行うことで、入力データと出力との間の複雑な関係を学習する。画像認識、音声認識、自然言語処理などの分野において高い性能を示しており、手書き文字認識や音声アシスタント、自動翻訳といった実問題に広く活用されている。各層では、前層からの出力に対して重みとバイアスを加え、その結果に活性化関数を適用することで次の層への出力を得る。これにより、ネットワーク全体として高い表現能力を持つ非線形関数を実現する。

多層パーセプトロン (MLP) に対する特徴写像およびカーネルを定義する。深さ  $N$  の MLP を次のように表す：

$$F = P \circ L_N \circ L_{N-1} \circ \cdots \circ L_1$$

ここで、各層  $L_i$  は重み行列  $W_i$  によるアフィン変換に続き、非線形関数  $\sigma$  を適用する写像である。ただし、最終層  $L_N$  では非線形関数  $\sigma$  は用いないものとする。ネットワークの出力には softmax 関数  $P$  を適用し、最終的に確率ベクトルを得る。ここで、 $N$  をネットワークの深さと呼ぶ。

入力データのバッチを  $x$  とすると、第  $i$  層における activation は

$$a_i = (L_i \circ L_{i-1} \circ \cdots \circ L_1)(x)$$

によって定義される。また、 $a_0$  は

$$a_0 = x$$

と定義する。

本研究では、多層パーセプトロンを用いたニューラルネットワークを構築し、学習過程において各層で得られる活性化値 (activation) に着目する。具体的には、バッチ内の 1 つの入力データに対し、第  $i$  層において得られる活性化値を成分とするベクトル  $v^{(i)}(x_j)$  ( $j = 1, \dots, x$ ) を考え、これを高次元ユークリッド空間上の 1 点として表現する。すなわち、第  $i$  層においては、活性化値から得られる

$x$  個の点データ  $v^{(i)}(x_1), \dots, v^{(i)}(x_x)$  が得られる。これら点データの集まりは第  $i$  層における内部表現を記述している。これら点データの集まり  $v^{(i)}(x_1), \dots, v^{(i)}(x_x)$  を点群として位相的データ解析を行い、学習の進行や層の深さに伴う内部表現の構造変化を解析する。

## 3. パーシステントダイアグラム

まず、パーシステントホモロジー群について説明する。パーシステントホモロジー群は TDA において重要な概念で、図形の連結成分や輪っか、空洞といった構造に注目することでデータの「形」を情報として抽出することができる。抽象的単体複体に基づくフィルトレーション毎にパーシステントホモロジー群を定義することが可能である。例えば 2 次元データに対するヴィートリス・リップス複体によるフィルトレーションの場合、図 1 の  $t = 0$  における点に対して、各点を中心とした円を考える。時刻につれ各点の円の半径を大きくしていくと、時刻  $t = 1$  で 2 つの輪っかが生成され、時刻  $t = 2$  では下の輪っかが消滅している。この消滅した輪っかについては発生時刻 (birth) が  $t = 1$ 、消滅時刻 (death) が  $t = 2$  と表すことができる。birth と death の 2 つの要素からなる集合 (birth, death) の集まりをパーシステントダイアグラムとよぶ。

## 4. パーシステント局所ホモロジー

### 4.1 局所ホモロジー

点集合  $X \subset \mathbb{R}^d$  に対し、ある基準点  $x \in X$  の近傍構造を捉えるために、相対ホモロジーを考える。

位相空間  $X$  と点  $x \in X$  に対して、 $x$  まわりの局所ホモロジーは

$$H_*(X, X - \{x\})$$

により定義される。例えば、 $X$  が  $n$  次元多様体であるならば、任意の  $x \in X$  に対して、

$$H_*(X, X - \{x\}) \cong \tilde{H}_*(S^n) \quad (1)$$

が成立する。(1) が成立しない点が位相空間  $X$  に 1 つでもあれば、 $X$  は多様体ではなく、そのような点は  $X$  の特異点と考えることができる。また、任意の点  $x \in X$  について、(1) が成立するような位相空間  $X$  は  $n$  次元ホモロジー

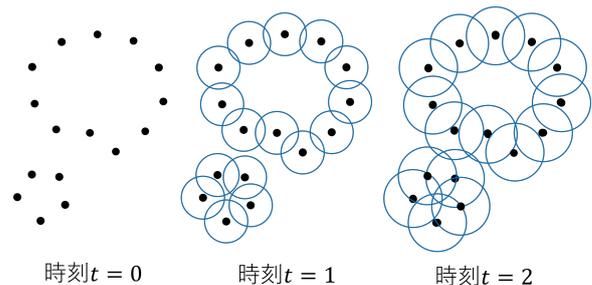


図 1 パーシステントホモロジー群の基本的な概念

多様体とよばれることがある [3].

#### 4.2 パーシステント局所ホモロジー

パーシステント局所ホモロジーはパーシステントホモロジーと局所ホモロジーの概念を組み合わせたものである。

点集合  $X \subset \mathbb{R}^d$  に対して、まず、ある基準点  $x \in X$  を中心とする半径  $r > 0$  の開球体の外部に存在するすべての点を、その境界である球面へ射影する。次に、射影後の点集合に基づいてヴィートリス・リップス複体を構成する。この際、半径  $r$  の球面上に存在する任意の点対間の距離をすべて「0」と定義する。この距離の修正により、球面上の点はすべて同一の頂点として扱われ、相対ホモロジーにおける「外部の潰し込み」が離散的な複体として近似される。

以上の操作によって得られた修正ヴィートリス・リップス複体のホモロジー群を、点集合  $X$  のパーシステント局所ホモロジーとして定義する [5].

### 5. Persistence Landscapes

Persistence Landscapes とは、TDA の分野において使用される手法で、特にパーシステントホモロジーから派生したデータのトポジカル特徴を分析し、可視化する方法である。Persistence Landscapes を用いることでパーシステントダイアグラムの離散的情報を連続関数にすることができる。

パーシステントダイアグラムの離散的情報  $(1, 5), (4, 6)$  を図 2 に示す。図 2 の  $(1, 5), (4, 6)$  から対角線に対して、図 3 のように縦軸と横軸方向に線を伸ばす。図 3 の対角線を横軸に取り直す (図 4)。図 4 の 2 つの曲線の交差がなくなるように曲線を変形し、高さが大きい順に  $\lambda_1, \lambda_2$  とする (図 5)。このようにして Persistence Landscapes は作成される。

### 6. Average Activation Landscape

局所ホモロジーに基づく Activation Landscape の計算手順を示す [5].

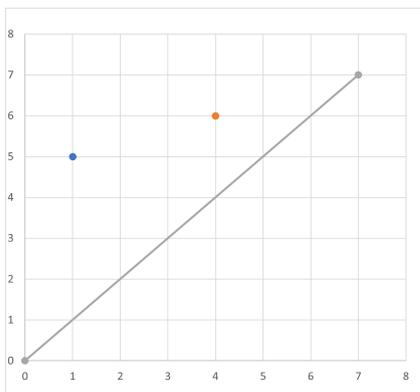


図 2  $(1, 5), (4, 6)$  のパーシステントダイアグラム

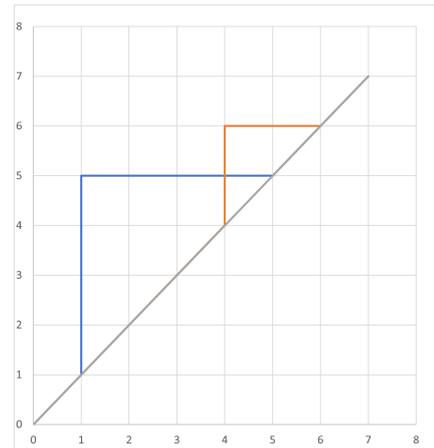


図 3

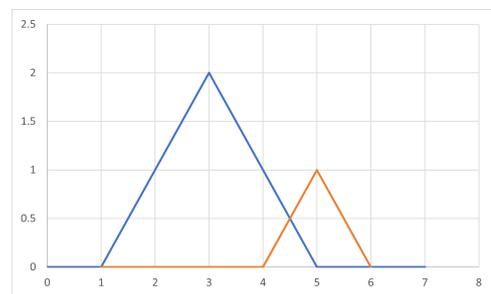


図 4 図 3 の対角線を横軸に取り直した曲線

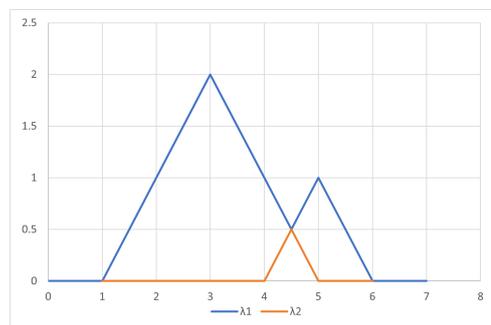


図 5  $(1, 5), (4, 6)$  の Persistence Landscapes

#### (1) 活性化ベクトルの前処理

第  $i$  層の activation  $a_i$  に対し、当該層が中間層である場合には、活性化ベクトルを中心化し、その平均を原点に移す。次に、各ベクトルを原点からのユークリッド距離によって順序付ける。その後、ベクトルをそのユークリッドノルムに基づいて昇順に並べ、第  $k$  位に位置するベクトルのノルムが 1 となるように全体をスケールする。さらに、ノルムが 1 を超えるベクトルについては、方向を保持したまま単位球面上へ射影し、対応する単位ベクトルで置き換える。

#### (2) 修正距離行列によるパーシステンス図の計算

正規化後の活性化ベクトル集合に対し、以下の規則に従って定義される修正距離行列を用いてヴィートリス・リップス複体を構成する。すなわち、両方の活性

化ベクトルのノルムが「1」以上である場合には、それらの間の距離を 0 とし、それ以外の場合にはユークリッド距離を用いる。この修正距離行列に基づき、パーシステンスダイアグラムを計算する。

入力データを独立にサンプリングして得られた  $M$  個の Activation Landscape

$$\{\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_M^{(i)}\}$$

に対し、各層  $i$  ごとに

$$\bar{\lambda}^{(i)} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \lambda_m^{(i)}$$

を定義することで、Average Activation Landscape を構成する。

## 7. sumpl,numpl

Persistence Landscapes の傾きが「+」から「-」に変わる場所（Persistence Landscapes を構成している数値データ  $pl_1, pl_2, \dots, pl_n$  の中で

$$pl_{i-1} < pl_i > pl_{i+1}$$

を満たす数値データ  $pl_i$ ) を Persistence Landscapes の頂点とよぶことにする。また  $pl_i$  の値を Persistence Landscapes の頂点の高さとする。このとき、以下の指標を定義する [1,2]。

- num\_pl . . . Persistence Landscapes の頂点の数
- sum\_pl . . . Persistence Landscapes の頂点の高さの総和

## 8. 研究手順

### 8.1 実験 1

- (1) MNIST データを用いて、10 個のニューラルネットワークを作成する。
- (2) 訓練データを用いて学習している途中で訓練精度が 99.5% に達した時のネットワークを保存し、保存したネットワークの重みとバイアスを取得する。
- (3) 訓練データ 6 万枚とテストデータ 1 万枚の中からランダムにサンプリングされた 500 枚をバッチして抽出する。バッチと取得した重み・バイアスを用いて各ネットワークにつき 1 つ、合計 10 個のパーシステンダイアグラムを算出する。
- (4) Asumpl, Anumpl の計算
  - (4-1) 各パーシステンダイアグラムから Activation Landscape を計算する。
  - (4-2) Activation Landscape から sumpl,numpl を計算する。
  - (4-3) 10 個のパーシステンダイアグラムから得られた sumpl および numpl について平均を計算し、そ

れぞれを Asumpl, Anumpl として出力する。

実験 1 では Activation Landscape を計算する際、原点を基準にパーシステント局所ホモロジーを考えている。点集合に含まれる各点の原点からの距離を計算し、その距離を昇順に並べたときの第 100 位の値を、球体の半径として計算したものを「TB100」とする。本実験では TB200, TB300, TB400 で計算を行う。

### 8.2 実験 2

- (1) MNIST データを用いて、1 個のニューラルネットワークを作成する。
- (2) 訓練データを用いて学習している途中で訓練精度が 99.5% に達した時のネットワークを保存し、保存したネットワークの重みとバイアスを取得する。
- (3) 訓練データ 6 万枚とテストデータ 1 万枚の中からランダムにサンプリングされた 150 枚をバッチして抽出する。
- (4) バッチの各点を基準点として以下の指標の計算を行う [3]。

$$\delta_0^{BN,(i)} = d_B(H_0(P), H_0(P^{(i)}))$$

Betti index:

$$\delta_1^{B,(i)} = \frac{\beta_1(P^{(i)})}{\beta_1(P)} - 1$$

Lifetime index:

$$\delta_1^{LT,(i)} = \frac{LT_1^{(i)}}{\beta_1(P^{(i)})} - \frac{\sum Lt_1(P)}{\beta_1(P)}, LT_1^{(i)} = \frac{P \text{ の直径}}{r} \sum Lt_1(P^{(i)})$$

ここで、 $P$  は 150 枚のデータから構成されるポイントクラウドを示し、 $P^{(i)}$  はデータ  $i$  ( $i = 1, \dots, 150$ ) を基準点として距離修正を行ったポイントクラウドを示す。

- (5) 横軸を  $\delta_0^{BN,(i)}$ 、縦軸をそれぞれ  $\delta_1^{B,(i)}$ 、 $\delta_1^{LT,(i)}$  として出力する。

図 6 のように、 $\delta_0^{(i)}$  の平均値（赤点線）と  $\delta_1^{(i)}$  の正負に基づいてデータを 4 つの象限に分類する。

## 9. 研究結果

### 9.1 実験 1

Anumpl, Asumpl の計算結果を図 7 および図 8 に示す。本結果は、第 1 層から第 6 層までにおける各指標の推移を表している。

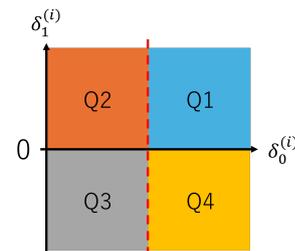


図 6 Q1,Q2,Q3,Q4

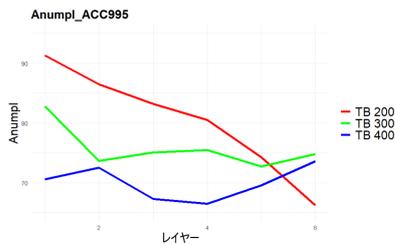


図 7 Anum\_pl

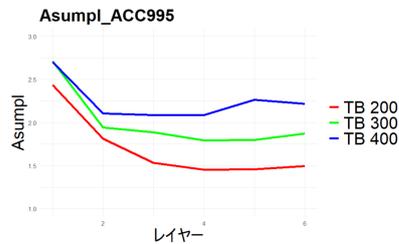


図 8 Asum\_pl

## 9.2 実験 2

実験 2 では、第 5 層および第 6 層に着目した解析を行うとともに、第 5 層から第 6 層への層通過に伴う変化を検討する。

Betti index の第 5 層の結果を図 9 に示す。図 9 に示した 4 象限に分類されたデータについて、そのヒストグラムを図 10 に示す。

Betti index の第 6 層の結果を図 11 に示す。図 11 に示した 4 象限に分類されたデータについて、そのヒストグラムを図 12 に示す。

データを 4 象限に分類した結果について、第 5 層 (図 9) から第 6 層 (図 11) における推移を、図 13 に示す。本図では、層通過に伴い、データ (点) がどの象限へ移動するかを可視化している。

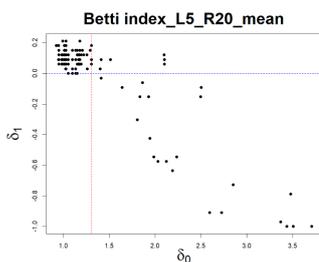


図 9 Betti index(第 5 層 (r=20))

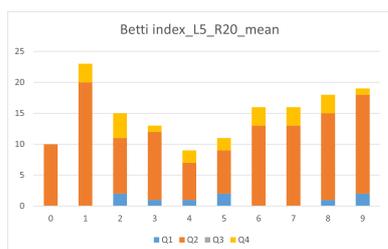


図 10 ヒストグラム (Betti index(第 5 層))

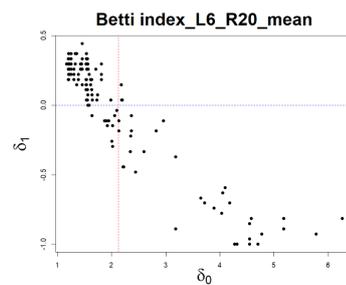


図 11 Betti index(第 6 層 (r=20))

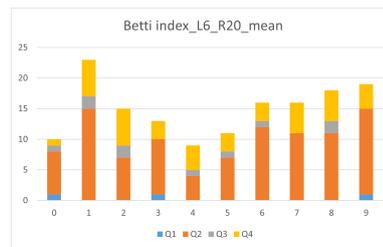


図 12 ヒストグラム (Betti index(第 6 層))

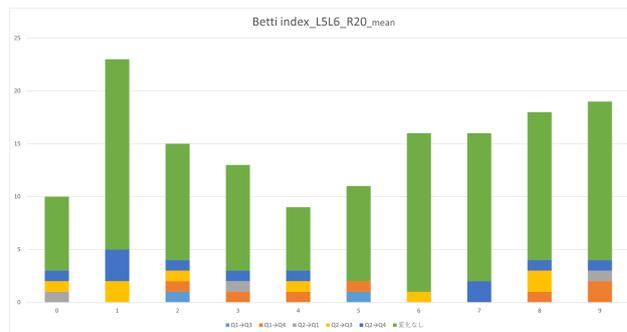


図 13 Betti index

Lifetime index の第 5 層の結果を図 14 に示す。図 14 に示した 4 象限に分類されたデータについて、そのヒストグラムを図 15 に示す。

Lifetime index の第 6 層の結果を図 16 に示す。図 16 に示した 4 象限に分類されたデータについて、そのヒストグラムを図 17 に示す。

データを 4 象限に分類した結果について、第 5 層 (図 14) から第 6 層 (図 16) における推移を、図 18 に示す。本図では、層通過に伴い、データ (点) がどの象限へ移動するかを可視化している。

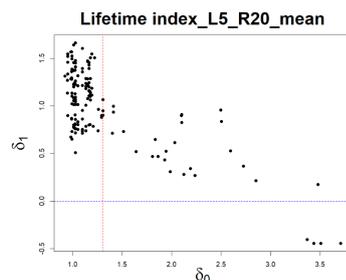


図 14 Lifetime index(第 5 層 (r=20))

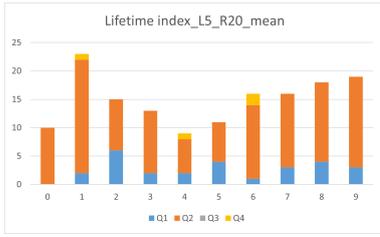


図 15 ヒストグラム (Lifetime index(第 5 層))

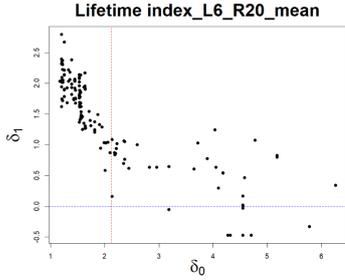


図 16 Lifetime index(第 6 層 (r=20))

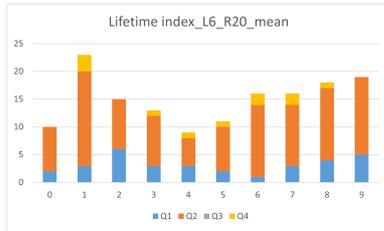


図 17 ヒストグラム (Lifetime index(第 6 層))

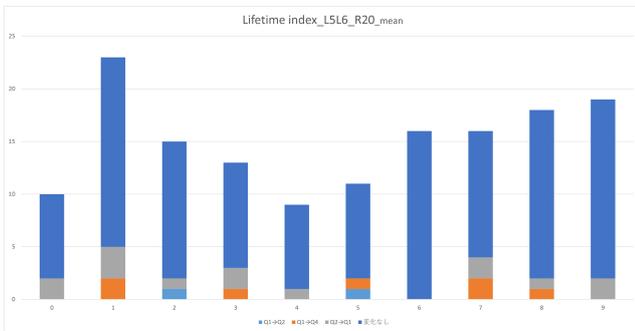


図 18 Lifetime index

2パラメータ位相的データ解析として、半径  $r$  の値を変化させることで、距離スケールと局所領域スケールの両方を考慮した位相的構造の変化を捉える。本実験では第6層に注目して、各点を基準とする球体の半径  $r$  を変化させる。

Betti index の第6層の結果を図 19～図 23 に示す。図 11 および図 19～図 23 に示した結果について、各象限に属する点の個数を集計し、その分布を図 24 に示す。

Lifetime index の第6層の結果を図 25～図 29 に示す。図 16 および図 25～図 29 に示した結果について、各象限に属する点の個数を集計し、その分布を図 30 に示す。

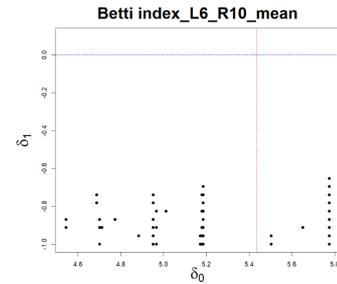


図 19 Betti index(r=10)

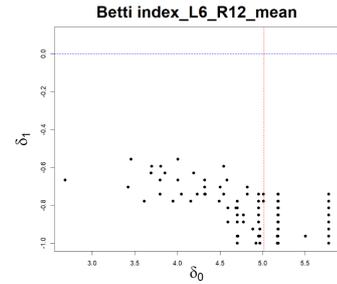


図 20 Betti index(r=12)

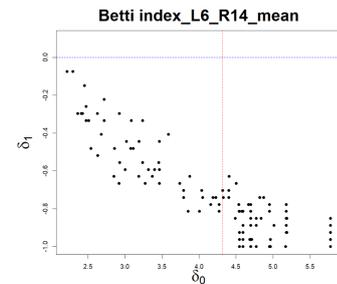


図 21 Betti index(r=14)

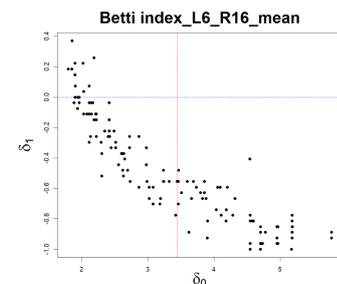


図 22 Betti index(r=16)

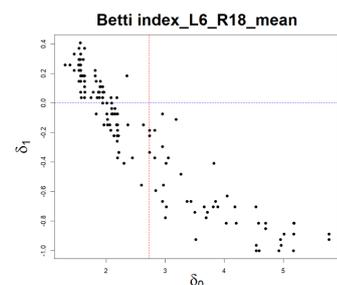


図 23 Betti index(r=18)

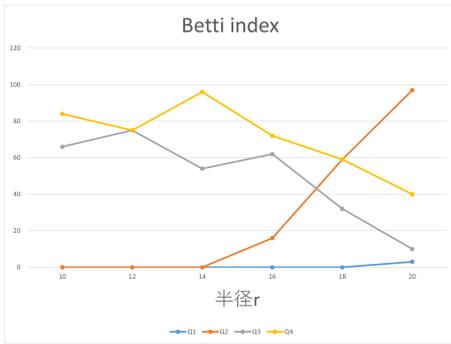


図 24 Betti index

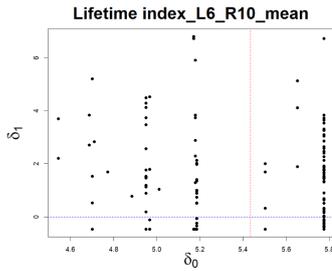


図 25 Lifetime index( $r=10$ )

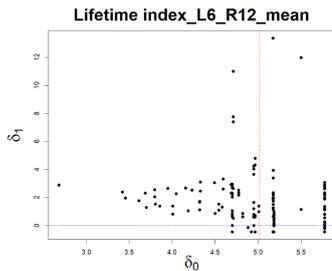


図 26 Lifetime index( $r=12$ )

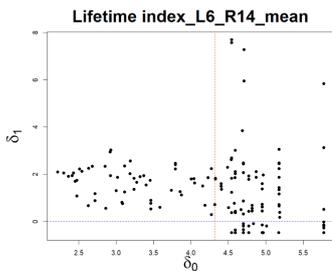


図 27 Lifetime index( $r=14$ )

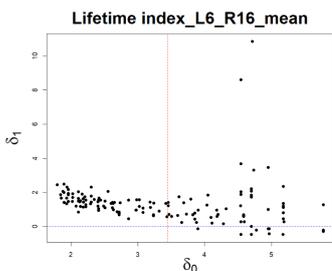


図 28 Lifetime index( $r=16$ )

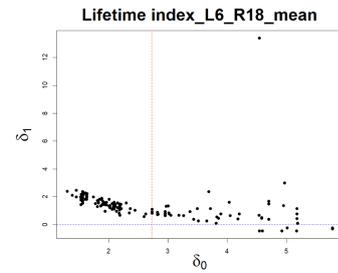


図 29 Lifetime index( $r=18$ )

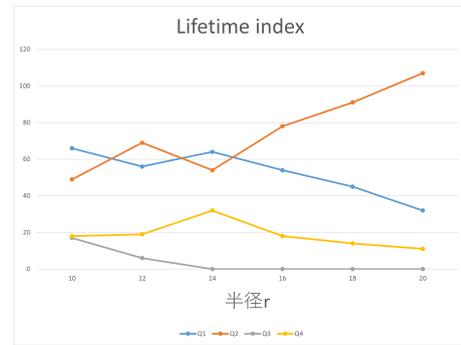


図 30 Lifetime index

## 10. 結論・考察

実験 1 では、Activation Landscape を計算する際、原点を基準にパーシステント局所ホモロジーを考えている。Anumpl の結果をみると、TB200 は層が進むにつれ値が小さくなっており、データの広がり小さくなっていることがわかる。TB300 は第 2 層以降値の変化が小さくなっている。つまりデータの広がり第 2 層で安定していることがわかる。TB400 は値の変化が他に比べ大きく、第 6 層の値が最も大きくなっている。この結果より、局所スケールが大きいほどデータのばらつきが大きくなっていることがわかる。Asumpl の結果をみると、TB200 は第 4 層まで値が小さくなっており、その後安定している。つまりデータの広がり第 4 層で安定していることがわかる。TB300 も同様に第 4 層まで値が小さくなっており、その後安定している。つまりデータの広がり第 4 層で安定していることがわかる。TB400 は第 4 層までは値が小さくなっているが、第 5 層で値が大きくなっている。この結果より、局所スケールが大きくなると、データのばらつきが生じることをわかる。Anumpl と Asumpl による実験を行ったが、ランドスケープの特徴量としては、Anumpl よりも Asumpl の方が適していると考えられる。これは、Asumpl がランドスケープの頂点の高さに基づいて重み付けを行う指標であり、存在時間が長く、すなわち情報の大きい特徴がより強く反映されるためである。

実験 2 では、データの各点を基準にパーシステント局所ホモロジーを考えている。まず、計算した指標について考える。 $\delta_0^{BN,(i)}$  は、全てのバッチから構成されるデータに

対して計算したパーシステントホモロジー群と、バッチ内の各点を基準として計算したパーシステントホモロジー群との差を表す指標である。この値が平均値より大きい場合 ( $\delta_0^{BN,(i)} > \text{平均値}$ )、基準点  $i$  は全体のバッチ集合の中で比較的孤立した点であることを示す。一方、平均値より小さい場合 ( $\delta_0^{BN,(i)} < \text{平均値}$ )、基準点  $i$  は全体のバッチ集合の中で比較的孤立していない点であることを示す。  $\delta_1^{B,(i)}$  は、全てのバッチから構成されるデータに対する Betti 数と、バッチ内の各点を基準として計算した Betti 数との差を表す指標である。この値が正の場合 ( $\delta_1^{B,(i)} > 0$ )、基準点  $i$  は位相的に大きな情報をもつ点であることを示す。一方、負の場合 ( $\delta_1^{B,(i)} < 0$ )、基準点  $i$  は大きな情報をもたない点であることを示す。  $\delta_1^{LT,(i)}$  は、全てのバッチから構成されるデータに対する 1 サイクルあたりの平均ライフタイムと、バッチ内の各点を基準として計算した 1 サイクルのライフタイムとの差を表す指標である。この値が正の場合 ( $\delta_1^{LT,(i)} > 0$ )、基準点  $i$  は大きな情報をもつ点であることを示す。一方、負の場合 ( $\delta_1^{LT,(i)} < 0$ )、基準点  $i$  は大きな情報をもたない点であることを示す。 Betti index の結果を見ると、第 5 層および第 6 層のいずれにおいても、第 2 象限に属する点が最も多く、次いで第 4 象限が多いことが確認できる。第 5 層から第 6 層への移行に伴う 4 象限間の推移に注目すると、第 2 象限に属していた点が他の象限へ移動するケースが多く見られる。一方で、第 3 象限および第 4 象限から他の象限へ移動する点は観測されなかった。 Lifetime index の結果を見ると、第 5 層および第 6 層のいずれにおいても、第 2 象限に属する点が最も多く、次いで第 1 象限が多いことが確認できる。第 5 層から第 6 層への移行に伴う 4 象限間の推移に注目すると、第 2 象限に属していた点が他の象限へ移動するケースが多く見られる。一方で、第 3 象限および第 4 象限から他の象限へ移動する点は観測されなかった。また、2 パラメータ位相的データ解析の結果を見ると、半径  $r$  の増加に伴って第 2 象限 (Q2) に属する点の個数が増大する傾向を示した。一方、その他の象限は、半径  $r$  の増加に伴って各象限に属する点の個数が減少する傾向を示した。  $r = 14$  では増加減少の傾向が他とは違うことが確認でき、今回のデータにおいて、  $r = 14$  はデータの広がりやデータが持つ情報量が特異的な挙動を示すスケールであると考えられる。以上より、バッチ内の各点がバッチ全体と比較した際に示す孤立性や、データがもつ位相的情報量の大きさを、本研究で導入した各指標によって定量的に評価できることが示された。

実験 1 では従来の距離スケールに加え局所領域スケールを導入することにより、全体構造だけでなく局所的な構造変化も捉えることが可能となった。その結果、層の進行に伴うデータ分布の広がりやばらつきの変化を定量的に捉えることが可能となり、学習過程において内部構造がどのように変化・安定化していくのかを位相的観点から

明らかにした。実験 2 では入力データの各点を基準に指標  $\delta_0^{BN,(i)}$ ,  $\delta_1^{B,(i)}$ ,  $\delta_1^{LT,(i)}$  を計算することで、各点が全体のデータ構造の中で果たす役割や、位相的情報量の違いを定量的に評価した。これにより、層の進行に伴ってどの点が構造的に重要となるのか、またどの点が安定的あるいは変化しやすいのかを明らかにした。また、局所領域スケールの導入により、各点の周囲における局所的な構造の違いをより詳細に捉えることが可能となった。

## 参考文献

- [1] 石原優生: Persistence Landscapes を用いた新型コロナウイルス感染症時系列データの位相的データ解析による分析, 九州工業大学, 卒業論文 (2024).
- [2] 石原優生, 佐藤好久: Persistence Landscapes を用いた新型コロナウイルス感染症時系列データの位相的データ解析による分析, 火の国情報シンポジウム 2024 論文集.
- [3] Yoshihisa Sato: Local Homology-Based Analysis of Neighborhood Structures around Individual Data Points in Topological Data Analysis, preprint 2026.
- [4] 平岡裕章: タンパク質構造とトポロジー パーシステントホモロジー群入門, 共立出版 (2013).
- [5] Matthew Wheeler, Jose Bouza, Peter Bubenik: Activation Landscapes as a Topological Summary of Neural Network Performance, 2021 IEEE International Conference on Big Data (Big Data), 2021, pp. 3865-3870.