

鎖状ハニカム構造における最適ペブリング数

町田 諒^{†1} 山口 勇太郎^{†1} 来嶋 秀治^{†1}

概要：グラフペブリングでは、グラフとそのグラフの頂点に対するペブル (小石) の配置が与えられ、ペブリングムーブという操作を繰り返すことでペブルを動かし目標の頂点へと運んでいく。任意の頂点へペブルを運ぶことが可能となる最小のペブルの数は最適ペブリング数と呼ばれ、さまざまなグラフで研究されている。最近では四角形が敷き詰められたグラフが研究されており、関連するグラフとして六角形が敷き詰められたハニカム構造のグラフに注目する。本研究では、ハニカム構造のグラフの最適ペブリング数導出の第一歩として、六角形が鎖状に繋がったグラフに対して最適ペブリング数を考察する。

キーワード：グラフ理論, グラフクラス, 離散最適化

The Optimal Pebbling Number of Chainlike Honeycomb Structure Graphs

1. はじめに

グラフペブリングでは、グラフとそのグラフの頂点に対するペブル (小石) の配置が与えられ、ペブリングムーブという操作を繰り返すことでペブルを動かし目標の頂点へと運んでいく。これは資源を輸送する上でその資源自身が消費されていくものをモデル化したものであり、タンカーによる燃料輸送などが簡単な例である。

グラフペブリングにおける中心的な問題としては、ペブルの配置に対して目的の頂点へペブルを移動させることが可能であるかというものである。これについて、目的の頂点へペブルが到達可能か判定するアルゴリズムや、より少ないペブルの数で済む効率の良い配置方法などの研究が行われている。中でも任意の頂点へペブルを運ぶことが可能となる最小のペブル数を最適ペブリング数と呼び、様々なグラフにおいて研究されている。具体的には、パスやサイクル [1], [2], 超立方体 [3] などにおいて、最適な配置方法とそのときのペブルの数、最適配置を得るためのアルゴリズム及びその計算複雑性 [4] などの研究が行われてきた。

最近では、四角形が敷き詰められた階段状のグラフの最適ペブリング数についての研究なども為されている [5], [6], [7]。この階段状のグラフに関連するグラフとして、本研究では、



図 1 ペブリングムーブ
Fig. 1 Pebbling move

六角形が敷き詰められたハニカム構造のグラフに注目する。その最適ペブリング数を解明する第一歩として、六角形が鎖状に繋がったグラフの最適ペブリング数について考察し、その上下界を示す。

2. 準備

グラフペブリングでは、グラフ G とそのグラフの頂点へのペブル (小石) の配置 D が与えられ、ペブリングムーブを繰り返すことでペブルを移動させていく。ペブリングムーブでは、2 つ以上のペブルを持つ頂点 v から 2 つのペブルを取り除くことで、 v の任意の隣接頂点 u にペブルを 1 つ加えることができる (図 1)。

グラフ G におけるペブル配置 D とある頂点 r について、ペブリングムーブを任意の回数 (0 回も可) 行った後に、 r にペブルを持たせることが出来る場合、 D は r -解決可能 (r -solvable) である、もしくは r は配置 D において到達可能 (reachable) であるという (図 2)。また、配置 D においてすべての頂点が到達可能であったとき、その配置 D は解決

^{†1} 現在, 九州大学
Presently with Kyushu University

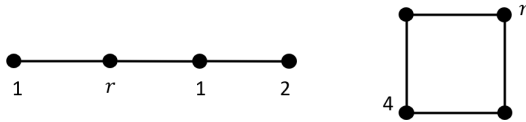


図 2 r -解決可能である例
Fig. 2 Examples of r -solvable distributions

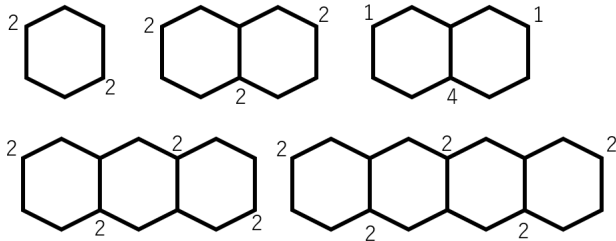


図 3 六角形が少ない場合での最適な配置例
Fig. 3 Examples of optimal distributions for a small number of hexagons

可能 (*solvable*) であると定義する (図 2 で紹介した配置は解決可能でもある). すべての頂点が到達可能である配置が 1 つでも存在するような最小のペブルの個数 k を最適ペブリング数 (*optimal pebbling number*) といい, $\pi_{\text{opt}}(G) = k$ とする.

3. 本論

ハニカム構造のような六角形が敷き詰められたグラフについて最適ペブリング数を考察していく. 特に本研究では, その第一歩として六角形が鎖状につながれたグラフについて考えていく.

3.1 直線状の鎖状ハニカム構造における最適ペブリング数

本節では, 最もシンプルな直線状に繋がれたグラフについて考察する. 繋がれた六角形の個数 $h \in \mathbb{N}$ について, 直線状に六角形が並んでいるグラフを H_h とする. 本研究では, このグラフに対して以下の定理を示す.

定理 1. $\lceil 3h/2 \rceil + 1 \leq \pi_{\text{opt}}(H_h) \leq 2h + 2$

まずは上界について示す. 六角形の数が少ない場合では図 3 のような配置で解決可能となっている. 図 3 の中で, 向かい合う頂点に 2 個ずつのペブルが置かれている配置方法に着目する. 六角形が 4 個繋がったグラフに対して六角形を 1 つ追加するとき, 同様に向かい合う頂点に 2 個のペブルを配置すれば, すべての頂点が到達可能となることが分かる. これを繰り返すことで数学的帰納法より示すことができる.

下界を導くに当たって, 縮約という方法を用いる. 縮約では頂点集合を選択し, その頂点集合を 1 つの頂点にまとめる (図 4). 縮約前のグラフ G が最適な配置であれば, 縮約後のグラフ H においてもすべての頂点に到達可能であ

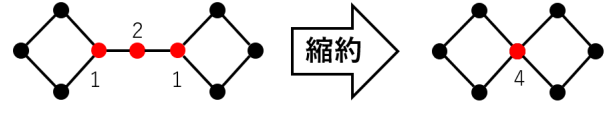


図 4 縮約
Fig. 4 Collapsing

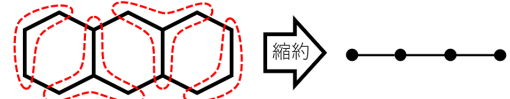


図 5 パスへの縮約
Fig. 5 Collapsing to a path

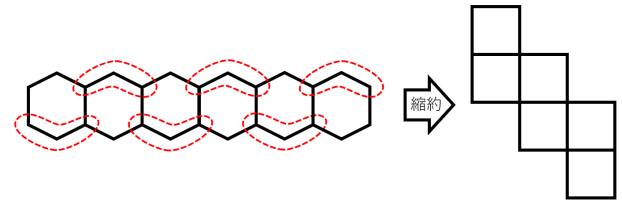


図 6 階段グラフへの縮約
Fig. 6 Collapsing to a staircase graph



図 7 四角形が直線状に並んだグラフへの縮約
Fig. 7 Collapsing to a graph of squares connected linearly

る. したがって, $\pi_{\text{opt}}(G) \geq \pi_{\text{opt}}(H)$ が成り立つ. この性質を利用し, 最適ペブリング数が既知のグラフに縮約することで下界を求める.

まず, 図 5 のように縮約を行うことで, 六角形の数より 1 つだけ頂点の多いパスを得ることができる. パスの最適ペブリング数は既知である [1] ので, それを利用して $\pi_{\text{opt}}(H_h) \geq \lceil 2(h+1)/3 \rceil$ が得られる.

次に, 図 6 のように縮約を行うことで階段状のグラフを得ることができる. このグラフの最適ペブリング数も既に知られており [6], そこから $\pi_{\text{opt}}(H_h) \geq \lceil 3h/4 \rceil$ が得られる.

最後に, 図 7 のような縮約を行う. すると四角形が頂点でつながり, 直線状に並んだグラフが得られる. このグラフについても最適ペブリング数が知られており [6], $\pi_{\text{opt}}(H_h) \geq \lceil 3h/2 \rceil + 1$ が得られる.

以上の結果から, 定理 1 が成り立つことが分かる.

3.2 一般的な鎖状ハニカム構造における最適ペブリング数

本節では, 直線状に限定せず六角形が一本に繋がった鎖状のハニカム構造の最適ペブリング数について, 直線状のハニカム構造と比較しつつ考察する. 鎖状ハニカム構造の

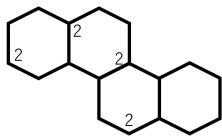


図 8 直線状の配置が使えないグラフの例

Fig. 8 An example of a graph that does not admit the distribution in the linear case

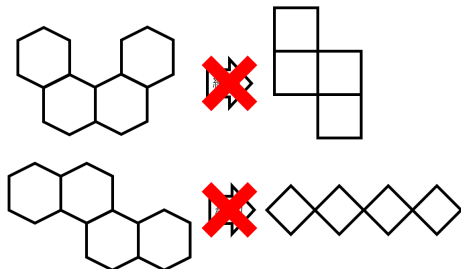


図 9 直線状と同様な縮約が行えないグラフの例

Fig. 9 Examples of graphs that cannot be collapsed in the same way as the linear case

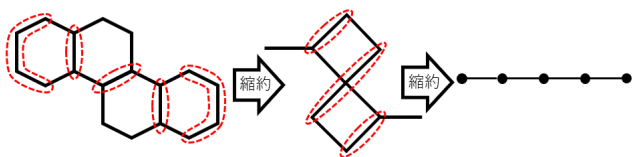


図 10 鎖状ハニカム構造のグラフのパスへの縮約

Fig. 10 Collapsing to a paths from a chainlike hanycomb structure graph

グラフは 3 つの六角形で重複する頂点が存在しないように六角形を繋げたグラフとし、繋げられた六角形の数 $h \in \mathbb{N}$ を用いて、 H_h^* と表す。このグラフにおいて、以下の定理を示す。

定理 2. $\lceil 2(h+1)/3 \rceil \leq \pi_{\text{opt}}(H_h^*) \leq \lfloor (8h+4)/3 \rfloor$

まず H_h^* の最適ペブリング数の上界について、直線状の上界で行った対角上の頂点に 2 つずつ繰り返しペブルを配置していく手法は、直線でない限り成立しない場合がある (図 8)。したがって、直線状の上界 $2h+2$ を適用することはできない。連結グラフにおける最適ペブリング数の上界は分かっているので、それを利用して、 $\pi_{\text{opt}}(H_h^*) \leq \lfloor (8h+4)/3 \rfloor$ が得られる。

下界としては、階段状のグラフや四角形が直線状に繋がったグラフへの縮約は、グラフの形状によって行えない場合が存在している (図 9) ので、一般的に適用することはできない。一方で、パスへの縮約は可能である (図 10) ので、直線状のときと同様にパスの最適ペブリング数から、 $\lceil 2(h+1)/3 \rceil \leq \pi_{\text{opt}}(H_h^*)$ であることが分かる。

4. まとめ

本研究では、鎖状ハニカム構造のグラフにおける最適ペ

ブリング数について調査した。結果として、鎖状の中でも一直線状に繋がったグラフについては、六角形の数 h を用いた予想値 $2h+2$ に対して、上界 $2h+2$ 、下界 $\lceil 3h/2 \rceil + 1$ が得られた。上界については、規則性のある具体的な配置方法を提示し、数学的帰納法によりその正しさを証明した。下界については、最初にパスへ縮約を行った場合では $\lceil 2(h+1)/3 \rceil$ という値であったが、縮約の方法を工夫することで四角形の階段グラフを得ることができ、より良い下界を導出することができた。一方で、直線状に限定しない鎖状ハニカム構造のグラフにおいて、上界では直線状において提示した配置方法が利用できないことがわかり、下界では直線状の補題の中で唯一適用できるパスへの縮約より $\lceil 2(h+1)/3 \rceil$ という値が得られた。

今後の課題として、直線状のハニカム構造の下界についてより予想値に近いものを導くこと、鎖状以外のハニカム構造において本研究の結果を応用し考察することなどが存在している。

参考文献

- [1] T Friedman and Cindy Wyels. Optimal pebbling of paths and cycles. *arXiv preprint math/0506076*, 2005.
- [2] Lior Pachter, Hunter S Snevily, and Bill Voxman. On pebbling graphs. *Congressus Numerantium*, Vol. 107, pp. 65–80, 1995.
- [3] Fan RK Chung. Pebbling in hypercubes. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 2, No. 4, pp. 467–472, 1989.
- [4] Kevin Milans and Bryan Clark. The complexity of graph pebbling. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 20, No. 3, pp. 769–798, 2006.
- [5] Ervin Györi, Gyula Y Katona, and László F Papp. Constructions for the optimal pebbling of grids. *arXiv preprint arXiv:1601.02229*, 2016.
- [6] Ervin Györi, Gyula Y Katona, László F Papp, and Casey Tompkins. The optimal pebbling number of staircase graphs. *Discrete Mathematics*, Vol. 342, No. 7, pp. 2148–2157, 2019.
- [7] Chenxiao Xue and Carl Yerger. Optimal pebbling on grids. *Graphs and Combinatorics*, Vol. 32, No. 3, pp. 1229–1247, 2016.