Golden Ratio Encoder の拡張

岡田 真明[1]　来嶋 秀治[1]

概要：β 展開は，$1 < \beta \leq 2$ を基として実数値をビット列に変換する手法である．岡田，来嶋は黄金比 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を基とする β 展開におけるセグメントの配置の種類を有限に抑える閾値パラメータ ν の十分条件を示した．Daubechies 達は黄金比 φ を基とする β 展開を実装する手法として Golden Ratio Encoder を提案した．本論文では Golden Ratio Encoder を拡張し，φ 以外の代数的数を基とする β 展開に対応させる手法を提案する．

Extension of the Golden Ratio Encoder

Abstract: β-expansion is a method to translate a real number to a bit sequence with a base β. Okada and Kijima proved that the number of locations of segments is finite for a base $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ when threshold $\nu = a\varphi + b$ with rational number a and b. Daubechies et al. proposed the golden ratio encoder which is A/D conversion algorithm based on β-encoder with $\beta = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. This paper proposes an extension of the golden ratio encoder that correspond to β-expansion with an algebraic number β.

1. はじめに

β 展開は実数値を基 β でビット列に変換する手法であり，β 写像 $C_{\beta,\nu}$ によって定義される．β 写像は基 $\beta \in [1, 2)$ と閾値 $\nu \in [1, \frac{1}{\beta-1}]$ を用いて定義される．β 写像はカオス的性質をもつため，ある初期値の i 回 β 写像を計算することは，定義にしたがって計算する以外の方法では困難である．

β 展開は，固定された β に対して閾値 ν がとりうる値にある程度の幅がある．そのため正確でない比較器を用いて実装することが可能であり，A/D 変換への応用が考えられる [1]．牧野らは，$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \beta \leq 2$ である β 展開について，ビット列の長さ L に対して入力値とその復元値の平均二乗誤差を $\frac{1}{12}\beta^{-2L}$ で抑えられることを示した [3]．この誤差解析において，セグメントとよばれる概念が用いられている．セグメントはビット長 L に対して最大 2^L 個存在するが，その配置の種類は高々 $2L$ 個である [3]．冨田はビット長 L に対するセグメントの配置が $2L$ 個，$L+$ 定数個，あるいは定数個の 3 つの場合に分類されることを示した [4]．岡田，来嶋はとくに $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を基とする β 展開について，有理数 a, b を用いて $\nu = a\varphi + b$ と書ける場合にはセグメントの配置が有限となることを示した．

Daubechies 達は Golden Ratio Encoder とよばれる A/D 変換の手法を提案した [2]．Golden Ratio Encoder は $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を基とする β 展開を正確でない乗算器を用いて実装する手法である．黄金比 φ は $\varphi^2 = \varphi + 1$ を満たす，もっとも基本的な代数的数である．また Daubechies 達は tribonacci や polynacci への拡張についても示唆を与えている [2]．

本論文では Golden Ratio Encoder を拡張し，polynacci を含む代数的数を基とする β 展開に対応させる手法を提案する．

2. 準備

2.1 β 展開

β 展開は，実数 $x \in [0, \frac{1}{\beta-1})$ をビット列 $\mathbf{b} = b_1 b_2 \cdots$ に変換する手法であり，以下の β 写像 $C_{\beta,\nu} : [0, \frac{1}{\beta-1}) \to [0, \frac{1}{\beta-1})$ を用いて定義される．

$$C_{\beta,\nu}(x) = \begin{cases} \beta x & (x < \frac{\nu}{\beta}) \\ \beta x - 1 & (x \geq \frac{\nu}{\beta}) \end{cases} \tag{1}$$

ここで β は $1 < \beta \leq 2$ の基であり，ν は $1 \leq \nu \leq \frac{1}{\beta-1}$ の閾値である．入力 x を β 展開して得られるビット列 $\mathbf{b} = b_1 b_2 \cdots$ を

---

[1] 九州大学
Kyushu University, Fukuoka, Fukuoka 819–0395, Japan

$$b_i = \begin{cases} 0 & (C^{i-1}_{\beta,\nu}(x) < \frac{\nu}{\beta}) \\ 1 & (C^{i-1}_{\beta,\nu}(x) \geq \frac{\nu}{\beta}) \end{cases} \tag{2}$$

と定める．ここで $C^i_{\beta,\nu}(x)$ は x に i 回 β 写像をかけたもの，すなわち $C^{i+1}_{\beta,\nu}(x) = C_{\beta,\nu}(C^i_{\beta,\nu}(x))$ である．このようにビット列を定義すると $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\beta^{-i}$ が成り立つ．

2.2 Golden ratio encoder

Golden ratio encoder は，状態ベクトル $\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} u_n & u_{n+1} \end{bmatrix}^\top$ を用いて実数 $x \in [0, \frac{1}{\beta-1})$ をビット列 $\mathbf{b} = b_1b_2\cdots$ に変換する手法である．状態 u_n の遷移は

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1} - b_{n+1} \tag{3}$$

と定義される．また得られるビット列を

$$b_{n+1} = \begin{cases} 0 & (\begin{bmatrix} \varphi^{-1} & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}_n < \frac{\nu}{\varphi}) \\ 1 & (\begin{bmatrix} \varphi^{-1} & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}_n \geq \frac{\nu}{\varphi}) \end{cases} \tag{4}$$

と定める．ここで $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．このようにビット列を定義すると，状態ベクトル $\mathbf{u}_n$ は φ を基とする n 回 β 写像に対応することが以下のとおり確認される（[2] 参照）．

命題 2.1　$u_0 = 0, u_1 = x$ とすると，任意の自然数 n に対して

$$C^n_{\varphi,\nu}(x) = \begin{bmatrix} \varphi^{-1} & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}_n \tag{5}$$

が成り立つ．

証明 1　帰納法で示す．

(1) $n = 0$ のとき

$$\begin{bmatrix} \varphi^{-1} & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \varphi^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = x \tag{6}$$

であるから確かに正しい．

(2) $n = i$ のとき命題が成り立つと仮定すると，β 写像の定義より

$$\begin{aligned} C^{i+1}_{\varphi,\nu}(x) &= \varphi C^i_{\varphi,\nu}(x) - \mathbb{I}\left[C^i_{\varphi,\nu}(x) \geq \frac{\nu}{\varphi}\right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \varphi \end{bmatrix}\mathbf{u}_i - b_{i+1} \end{aligned}$$

がいえる．ここで $\mathbb{I}[\cdot]$ は，括弧内の条件式が真ならば 1 を，偽ならば 0 を返す関数である．また

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi^{-1} & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}_{i+1} &= \begin{bmatrix} \varphi^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}_i \\ &\quad - \begin{bmatrix} \varphi^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ b_{i+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \varphi \end{bmatrix}\mathbf{u}_i - b_{i+1} \end{aligned}$$

である．したがって $n = i + 1$ のときにも命題が成り立つ．

以上より，任意の自然数 n に対して $C^n_{\varphi,\nu}(x) = \begin{bmatrix} \varphi^{-1} & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}_n$ が成り立つ．

3. Golden ratio encoder の拡張

黄金比 φ は $\varphi^2 = \varphi + 1$ を満たす代数的数である．この章では $1 < \beta \leq 2$ を満たす任意の代数的数を基とする β 展開に対応する，Golden Ratio Encoder の拡張を提案する．

3.1 拡張 Golden Ratio Encoder の定義

状態ベクトル $\mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} u_n & \cdots & u_{n+d-1} \end{bmatrix}^\top$ を考える．ただし $d \geq 2$ とする．状態 u_n の遷移を

$$u_{n+d} = \mathbf{m}^\top\mathbf{u}_n - b_{n+1} \tag{7}$$

と定義する．ここでベクトル $\mathbf{m}^\top = \begin{bmatrix} m_0 & \cdots & m_{d-1} \end{bmatrix}$ である．また得られるビット列を

$$b_{n+1} = \begin{cases} 0 & (\mathbf{a}^\top\mathbf{u}_n < \frac{\nu}{\varphi}) \\ 1 & (\mathbf{a}^\top\mathbf{u}_n \geq \frac{\nu}{\varphi}) \end{cases} \tag{8}$$

と定める．ここでベクトル $\mathbf{a}^\top$ は

$$\mathbf{a}^\top = \beta^{-d}\begin{bmatrix} \beta^0 & \beta^1 & \cdots & \beta^{d-1} \end{bmatrix} A \tag{9}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & m_0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & m_1 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ m_0 & m_1 & \cdots & m_{d-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

である．

4. 代数的数を基とする β 展開との対応

上で定義した Golden Ratio Encoder の拡張手法が，$\beta^d = m_{d-1}\beta^{d-1} + \cdots + m_0\beta^0$ の実数解 β を基とする β 展開に対応することを示す．

定理 4.1　β $(1 < \beta \leq 2)$ が $\beta^d = \begin{bmatrix} \beta^0 & \cdots & \beta^{d-1} \end{bmatrix}\mathbf{m}$ を満たすとする．このとき $u_0 = \cdots = u_{d-2} = 0, u_{d-1} = x$ とすると，任意の自然数 n に対して

$$C^n_{\beta,\nu}(x) = \mathbf{a}^\top\mathbf{u}_n \tag{11}$$

が成り立つ．

証明 2　帰納法で示す．

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\top\mathbf{u}_0 &= \beta^{-d}[\ \beta^0 \quad \cdots \quad \beta^{d-1}\ ]A\mathbf{u}_0 \\ &= \beta^{-d}[\ \beta^0 \quad \cdots \quad \beta^{d-1}\ ]\mathbf{m}x \\ &= \beta^{-d}\beta^d x \\ &= x \end{aligned}$$

より，$n = 0$ のとき確かに正しい．

$C^i_{\beta,\nu}(x) = \mathbf{a}^\top\mathbf{u}_i$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} C^{i+1}_{\beta,\nu}(x) &= \beta C^i_{\beta,\nu}(x) - \mathbb{I}\left[C^i_{\beta,\nu}(x) \geq \frac{\nu}{\beta}\right] \\ &= \beta\mathbf{a}^\top\mathbf{u}_i - b_{i+1} \end{aligned}$$

となる．また行列 M を

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & m_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & m_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & m_{d-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

とおけば状態ベクトル $\mathbf{u}_i$ の遷移について

$$\mathbf{u}_{i+1} = M^\top \mathbf{u}_i - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{n+1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

とかける．よって

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{a}^\top M^\top \mathbf{u}_i - b_{i+1}$$

がいえる．したがって $C^{i+1}_{\beta,\nu}(x) = \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_{i+1}$ を示すには $\beta\mathbf{a}^\top = \mathbf{a}^\top M^\top$ を示せばよい．

$$\beta[\ \beta^0 \quad \cdots \quad \beta^{d-1}\ ] = [\ \beta^0 \quad \cdots \quad \beta^{d-1}\ ]M \tag{14}$$

であるから

$$\beta\mathbf{a}^\top = \beta^{-d}\begin{bmatrix} \beta^0 & \cdots & \beta^{d-1} \end{bmatrix} MA \tag{15}$$

$$\mathbf{a}^\top M^\top = \beta^{-d}\begin{bmatrix} \beta^0 & \cdots & \beta^{d-1} \end{bmatrix} AM^\top \tag{16}$$

となる．また $A = A^\top$ であるから，$AM^\top = A^\top M^\top = (MA)^\top$ が成り立つ．よって $\beta\mathbf{a}^\top = \mathbf{a}^\top M^\top$ を示すには $MA = (MA)^\top$ を示せばよい．MA を計算すると

$$MA = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & m_0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & m_0 & \cdots & m_{d-2} \end{bmatrix} + \mathbf{m}\mathbf{m}^\top \tag{17}$$

がいえる．よって $MA = (MA)^\top$ が成り立つ．したがって，$n = i$ で命題が成り立つならば，$C^{i+1}_{\beta,\nu}(x) = \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_{i+1}$ も成り立つ．
以上より，任意の自然数 n に対して $C^n_{\beta,\nu}(x) = \mathbf{a}^\top \mathbf{u}_n$ が成り立つ．

5. おわりに

本論文では Golden Ratio Encoder を拡張し，代数的数を基とする β 展開に対応する手法を提案した．この手法を用いて，代数的数を基とする β 展開におけるセグメントの配置の種類を有限個に抑える閾値 ν の十分条件を示すことが今後の課題としてあげられる．

参考文献

[1] I. Daubechies, R. DeVore, C. S. Güntürk and V. A. Vaishampayan, Beta expansions: A new approach to digitally corrected A/D conversion, in Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems(ISCAS), pp. II-784-787, 2002.

[2] I. Daubechies, C. S. Güntürk, Y. Wang, and Ö. Yilmaz, The Golden Ratio Encoder, IEEE Trans. on Info. Theory 56(10), 5097-5110, 2010.

[3] T. Makino, Y. Iwata, K. Shinohara, Y. Jitsumatsu, M. Hotta, H. San and K. Aihara, Rigorous estimates of quantization error for A/D converters based on beta-map, IEICE, 6, pp. 99-111, 2015.

[4] 冨田祐作，乱択 β 展開，九州大学大学院システム情報科学府修士論文，2018.

[5] 岡田真明，来嶋秀治，φ 進展開におけるセグメントタイプの個数について，平成 30 年度（第 71 回）電気・情報関係学会九州支部連合大会，2018.

