

# ランダム射影と辞書学習を用いた マルウェアのスパース表現と分類

神田 彩美<sup>1</sup> 酒井 智弥<sup>1</sup>

**概要:** コンピュータの発展とともに新種のマルウェアの数が増加している。それらの大半が、既存のマルウェアの一部が改変された、いわゆる亜種である。亜種を分析するには、機能ごとのまとまりであるファミリーに分類することが有効である。亜種のファミリーを推定するには改変前のマルウェアのファミリーを推定することが必要である。本研究では、既存のマルウェアで亜種のスパース表現をすることによって亜種を分類する手法を提案する。高効率ランダム射影と識別的辞書学習を用いることで計算量の削減を行い、実行時間や精度の評価を行う。

**キーワード:** 頻出パターン, 外れ値検出, 識別的辞書学習, SRC

## Sparse Representation and Classification of Malware Using Random Projection and Dictionary Learning

AYAMI KANDA<sup>1</sup> TOMOYA SAKAI<sup>1</sup>

**Abstract:** Malicious software, a.k.a. malware, is increasing threats to computer safety. It often takes a form of executable code created as a subspecies with partial modifications of existing malware. Classifying the malware instances and discovering their modifications enable us to identify the possible security threats. Sparse representation of a malware instance can indicate its corresponding malware family. To improve the scalability of this sparse-representation-based malware classification, this paper proposes to employ an efficient algorithm of random projection and the so-called discriminative dictionary learning.

**Keywords:** frequent pattern, outlier detection, discriminative dictionary learning, sparse representation-based classification

### 1. 序論

本研究ではマルウェアをファミリーに分類することを目的としている。マルウェアとは悪意のあるソフトウェアや悪質なコードの総称である。コンピュータの発展とともに新たに発見されるマルウェアの数が増加している。その中でも多くを占めるのが、既存のマルウェアの一部を改変して作られた亜種である。亜種が持つ機能を分析するには、機能ごとのまとまりであるファミリーに分類することが有効である。そのためには改変前のマルウェアのファミリーを推定

し、亜種を分類することが必要である。

マルウェアを 8bit を 1 ピクセルとして画像に変換すると、同じファミリー内のマルウェアが類似した画像の特徴を持つことが知られている [1]。この特徴を利用して、 $k$  近傍法 [1] や畳込みニューラルネットワーク (CNN) [2]、スパースモデリング [3] を用いた分類手法が提案されている。 $k$  近傍法では、特徴ベクトルで表したマルウェアの間のユークリッド距離を計算しファミリーを推定する。しかし、マルウェアのファイルサイズに相当する高次元のベクトルで表現されたマルウェアの近傍探索は次元の呪いへの対策が不可欠である。CNN では、画像化したマルウェアの局所的な特徴を抽出し、特徴の組合せによってファミリーを推定す

<sup>1</sup> 長崎大学  
Nagasaki University

る。しかし、マルウェアの局所特徴は、画像化の際にマルウェアのデータを折り返す位置に依存する。スパースモデリングに基づく手法では、高次元ベクトルで表現したマルウェアを、既知のマルウェアの線形結合で表現する。CNNと同様に特徴の組合せに基づきファミリーを推定することができ、ランダム射影による次元削減も可能である。

本研究では、スパースモデリングに基づく既存手法を大幅に改善し、大量のマルウェアを活かして亜種のマルウェアのファミリーと改変部分を効率的に特定可能にする手法を提案する。先行研究ではランダム射影による次元削減と、既知のマルウェアのサンプルによる亜種のスパース表現によってファミリーと改変部分を特定している。この手法では、既知のマルウェアのサンプル数に従って計算量が增大することが課題となる。また、膨大なランダム行列を用いるランダム射影の計算量にも改善の余地がある。提案手法では高効率ランダム射影 [4] と識別的辞書学習 [5] を用いることで、サンプル数に依存しないスパース表現に基づき亜種のマルウェアのファミリーと改変部分の特定を見込む。

## 2. スパース表現に基づく識別法

### 2.1 スパース表現

ベクトルの集まり  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  から選出した少数のベクトルの線形結合でベクトル  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  を表現することを、 $\mathbf{y}$  の  $\mathbf{A}$  によるスパース表現と呼ぶ。

$$\mathbf{y} = x_1 \mathbf{a}^{(1)} + x_2 \mathbf{a}^{(2)} + \dots + x_n \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (1)$$

線形結合係数  $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  は、少数の  $x_i$  が非ゼロである。  $m \geq n$  のとき、 $\mathbf{x}$  はスパースとは限らない。一方、  $m < n$  の場合は、式 (1) を満たす  $\mathbf{x}$  が無数に存在し、 $\mathbf{A}$  の列ベクトルを適切に用意してあれば、最もスパースな  $\mathbf{x}$  が見つかることがある。

$\mathbf{y}$  が与えられたとき、これを  $\mathbf{A}$  によるスパース表現で誤差  $\varepsilon$  以内に近似する最もスパースな線形結合係数  $\mathbf{x}_*$  を求める問題は、次式のように定式化できる。

$$\mathbf{x}_* = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \quad (2)$$

ここで、 $\|\cdot\|_0$  は  $\ell_0$  ノルムであり、ベクトルの非ゼロ成分数を表す。式 (2) の最小解  $\mathbf{x}_*$  は貪欲法によって高い確率で得られることが知られている [6]。OMP(orthogonal matching pursuit)[7] はスパース解を得る貪欲法のひとつである。貪欲法は、残差  $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}$  に最も類似しているベクトルを  $\mathbf{A}$  から選んで  $\mathbf{x}$  の台に追加し、残差が最小になるように  $\mathbf{x}$  の非ゼロ成分を更新する方法である。貪欲法は極めて少数の非ゼロ成分を特定することでスパース解が求まる場合に非常に効率的なアルゴリズムである。

### 2.2 スパース表現に基づく識別法 (SRC)

SRC (sparse representation-based classification) [8] は

スパース解からクラスを特定する識別の手法である。第  $i$  クラスの訓練データを列ベクトルとする行列を  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$  とする。また、行列  $\mathbf{A}_i$  を連結した行列を  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ) とする。式 (2) のスパース解  $\mathbf{x}_* = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_k^T]^T$  ( $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ) がもし  $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$  ( $j \neq i$ ) となるならば、 $\mathbf{y}$  は  $\mathbf{A}_i$  の列ベクトルの線形結合のみで近似されているので、 $\mathbf{y}$  を第  $i$  クラスのデータとして識別できる。

第  $i$  クラスの訓練データのみによる  $\mathbf{y}$  の再構成を

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \quad (3)$$

とする。この再構成の残差を

$$r_i(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_i\|_2 \quad (4)$$

と定義すると、最も残差が小さいクラス  $c$

$$c = \arg \min_i r_i(\mathbf{y}) \quad (5)$$

に  $\mathbf{y}$  を識別できる。

もしデータ  $\mathbf{y}$  が  $\mathbf{y}'$  に部分的な改変が施されたものならば、次式のように表せる。

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}' + \mathbf{e} = \mathbf{A} \mathbf{x}' + \mathbf{e} = [\mathbf{A}, \mathbf{I}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \doteq \mathbf{B} \mathbf{w} \quad (6)$$

基底となる  $\mathbf{A}$  に単位行列  $\mathbf{I}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  を連結することで、改変部分  $\mathbf{e}$  を含めて  $\mathbf{y}$  を  $\mathbf{B}$  でスパース表現できる。スパース解  $\mathbf{w}_*$  を求める問題は次式のように書ける。

$$\mathbf{w}_* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_* \\ \mathbf{e}_* \end{bmatrix} = \arg \min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{w}\|_0 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{B} \mathbf{w}\|_2 \leq \varepsilon \quad (7)$$

$\mathbf{x}'_* = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_k^T]^T$  ( $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ) とすると、改変を考慮した残差は次式ようになる。

$$r_i(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{e}^* - \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i\|_2 \quad (8)$$

このように、改変部分を除いて残差を計算できるので、 $\mathbf{e}_*$  から  $\mathbf{y}$  の改変部分を特定するとともに、式 (5) からクラスを特定できる。

### 2.3 ランダム射影

ランダム射影とはランダム行列による線形変換であり、高次元データの低次元化に使用できる。乱数を要素とする行列  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{d_p \times m}$  を  $m$  次元のベクトル  $\mathbf{y}$  に乗じて、 $d_p$  次元の低次元なベクトル  $\mathbf{p}$  に変換する。

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{y} \quad (9)$$

ランダム行列  $\mathbf{R}$  の要素が、平均 0、分散  $1/d_p$  の乱数ならば、任意の  $N$  個の訓練データ  $\mathbf{y}^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) を  $d_p = \Omega(\varepsilon^{-2} \log N)$  次元にランダム射影したとき、次式

のようにランダム射影前後でデータ間の距離が高い確率  $1 - \Omega(e^{-m\epsilon^2})$  で近似的に保存される [9][10].

$$(1-\epsilon)\|\mathbf{y}^{(j)}-\mathbf{y}^{(i)}\|_2 \leq \|\mathbf{p}^{(j)}-\mathbf{p}^{(i)}\|_2 \leq (1+\epsilon)\|\mathbf{y}^{(j)}-\mathbf{y}^{(i)}\|_2 \quad (10)$$

ただし、ランダム行列を用いる射影のため  $d_p \times m$  のランダム行列を生成する必要があり、無視できない計算時間と記憶領域が必要になる。これを改善した高効率ランダム射影が考案されている [4]。これはランダム系列との巡回畳み込みとスペクトラム拡散を用いたランダム射影であり、ランダム行列を生成・記憶することなく、式 (9) の性質を保証しながら、低計算量でランダム射影を実現できる。ランダム行列を用いるランダム射影では  $O(d_p m)$  の手間数と記憶領域が必要であるが、高効率ランダム射影ではそれぞれ  $O(m \log m)$  と  $O(d_p)$  に削減できる。

## 2.4 識別的辞書学習

辞書学習は、スパース表現を効率良く行うために基底を作る手法である。訓練データ  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  から辞書  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times s}$  ( $s < n$ ) を求める問題は次式のようになる。

$$(\mathbf{D}_*, \boldsymbol{\alpha}_*) = \arg \min_{(\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha})} \frac{1}{2} \|\mathbf{A} - \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}\|_F^2 \quad \text{subject to } \|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \leq T \quad (11)$$

非ゼロ成分数が  $T$  以下のもと  $\mathbf{D}$  の  $\mathbf{A}$  によるスパース表現と。誤差を減らすように  $\mathbf{D}$  の修正を繰り返すことで、 $\mathbf{A}$  よりも少ないベクトル数で互いに独立な辞書  $\mathbf{D}_*$  となる。式 (11) を解く手法には K-SVD[11] 等の手法がある。

また、識別的辞書学習 [5] は辞書と同時にクラスを識別するための識別器を学習する。2.2 と同様に  $k$  クラスある訓練データを連結した  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  を用いて、辞書  $\mathbf{D}_*$  と識別器  $\mathbf{W}_*$  を求める問題は次式のようになる。

$$(\mathbf{D}_*, \mathbf{W}_*, \boldsymbol{\alpha}_*) = \arg \min_{(\mathbf{D}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\alpha})} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \sqrt{\gamma} \mathbf{H} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \sqrt{\gamma} \mathbf{W} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \right\|_F^2 \quad \text{subject to } \|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \leq T \quad (12)$$

$\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{k \times n}$  は訓練データ  $\mathbf{A}$  のクラスを one-hot ベクトルで表したラベル、 $\gamma$  は  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{H}$  のバランスをとるためのパラメータである。 $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{H}$  を同時に辞書学習することにより、辞書  $\mathbf{D}_*$  と識別器  $\mathbf{W}_*$  を得る。つまりクラスを加味した辞書学習を行うことができる。

辞書  $\mathbf{D}_*$  によるテストデータ  $\mathbf{y}$  のスパース表現を行う。ここでは OMP を用いてスパース解を求める。

$$\mathbf{x}_* = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to } \|\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{x}\|_2 \leq \epsilon \quad (13)$$

そして、得られたスパース解  $\mathbf{x}_*$  を用いてラベルベクトル

$\mathbf{l} \in \mathbb{R}^k$  を次のように表せる。

$$\mathbf{l} = \mathbf{W}^* \mathbf{x}_* \quad (14)$$

$\mathbf{l}$  で最も大きい値を持つクラスが  $\mathbf{y}$  のクラスであると推定できる。

## 2.5 SRC のマルウェアへの適用

先行研究のランダム射影と SRC を用いたマルウェアの分類法について述べる [3]。ファミリが  $k$  種類、 $n$  個のマルウェアの訓練データが与えられたとき、未知のマルウェア  $\mathbf{y}$  のファミリの識別を行う。マルウェアはバイナリのデータのため、8bit1 塊とすると 0 から 255 の値が含まれた 1 つのベクトルで表すことができる。しかしそれぞれベクトルの長さがばらばらのため、0 で埋めることにより最も長いベクトルに合わせる。第  $i$  ファミリの訓練データ  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$  とし、 $\mathbf{A}_i$  を連結した行列を  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  とする。また、マルウェアのテストデータ  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  は既知のマルウェアに改変が施されたものと考えられるので、 $\mathbf{y} = \mathbf{y}' + \mathbf{e}$  と表せる。

まず  $\mathbf{A}, \mathbf{y}$  それぞれランダム射影し低次元化する。次に SRC と同様に低次元化した  $\mathbf{A}$  による低次元化した  $\mathbf{y}$  のスパース表現する。得られたスパース解を用いて各ファミリ毎に残差を求め、最も残差が小さいファミリに分類する。

## 3. 高効率ランダム射影と識別的辞書学習を用いた分類

先行研究では、ランダム射影したすべての訓練データの中からテストデータのスパース解を求めていた。しかし識別的辞書学習を行うことで、訓練データすべてを覚えることなくファミリを加味したスパース表現ができる。また、高効率ランダム射影により計算時間の短縮を図る。

2.5 と同様にマルウェアをファミリ毎に並べた訓練データ  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  と、訓練データのファミリに基づいたラベル  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{k \times n}$  を用意する。次に  $\mathbf{A}$  に対して高効率ランダム射影を行い、 $d$  次元まで削減する。

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}\mathbf{A} \quad (15)$$

ランダム射影後の訓練データ  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{d \times n}$  とラベル  $\mathbf{H}$  を用いて、識別的辞書学習を行う。

$$(\mathbf{D}_*, \mathbf{W}_*, \boldsymbol{\alpha}_*) = \arg \min_{(\mathbf{D}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\alpha})} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \sqrt{\gamma} \mathbf{H} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \sqrt{\gamma} \mathbf{W} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \right\|_F^2 \quad \text{subject to } \|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \leq T \quad (16)$$

$\gamma$  は辞書の訓練誤差と識別器の訓練誤差が等しくなるように設定する、得られた辞書  $\mathbf{D}_*$  を用いて、式 (13)(14) から、テストデータ  $\mathbf{y}$  のファミリを推定する。

また、2.2と同様にマルウェアの改変部分を表すと、式(6)より

$$\mathbf{Ry} = \mathbf{R}(\mathbf{Ax} + \mathbf{e}) = [\mathbf{RA}, \mathbf{R}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = [\sigma\mathbf{D}, \mathbf{R}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (17)$$

と表せる。σはスパース解を求める際の、辞書とランダム行列とのバランスをとるためのパラメータである。マルウェアの改変部分はランダム射影で用いたランダム行列を辞書と結合することで表現できる。式(7)(8)から、改変場所を特定する。

#### 4. 実験

実験では Malimg dataset[1] を用いる。25種類のファミリーで9339個のデータが含まれている。これらはマルウェアのデータをバイナリ化し8ビットを1塊として2次元画像に成形されたものである。各ファミリーに含まれているデータ数にはばらつきがあるため、各ファミリー75%の7004個を訓練データ、残りのうち各ファミリー20個ずつ取り出した合計500個をテストデータとする。

マルウェアをベクトルに変換した際の最大の長さは5,462,016であった、訓練データとテストデータを高効率ランダム射影で5,462,016次元から512次元に削減した。

訓練データをそのまま辞書としてスパース表現する手法と識別的辞書学習で得られた辞書を用いてスパース表現する手法の、分類の正答率と計算時間を比較する。また、識別的辞書学習で得られた辞書とランダム行列を用いてスパース表現を行い、改変場所の特定の精度を同じファミリーのマルウェアと比較する。

使用したPCはメモリ7.5GiB、プロセッサはIntel Core(TM)i7-6820HQ CPU@2.70GHzが8コア、OSはubuntu 16.04LTSである。使用言語はpython3.5.2、OMPはnumpy1.11.3、scipy0.19.1で実装した。

##### 4.1 分類の性能評価

OMPではT=45に設定し、先行研究と同様に訓練データを用いてテストデータをOMPでスパース表現し分類を行った。図1はその分類結果である。

識別的辞書学習では、辞書の本数を1024本、γ=0.7、T=45、計算の反復時間を600秒に設定した。得られた辞書を用いたOMPではT=45に設定した。図2はその分類結果である。

表1 識別的辞書学習をした場合としない場合の、正答率と計算時間

	正答率	計算時間
識別的辞書学習なし	89.2%	0.116 秒
識別的辞書学習あり	86.8%	0.025 秒

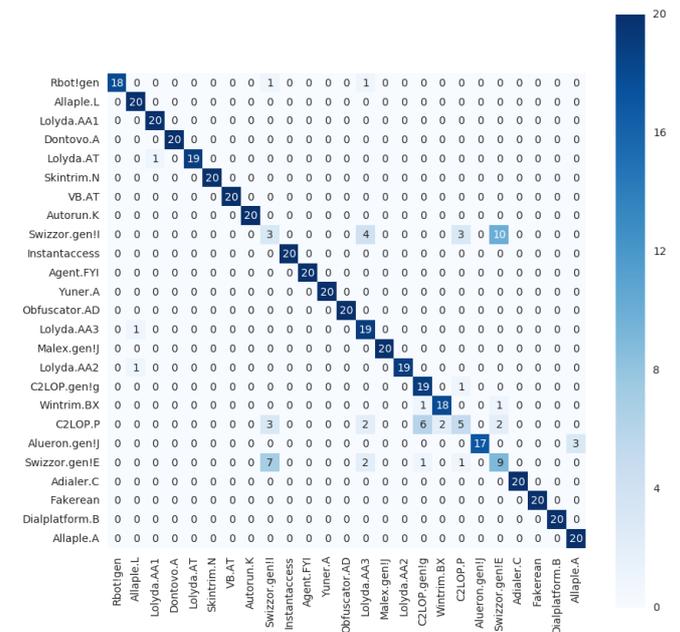


図1 テストデータを訓練データのみでスパース表現し分類を行った結果の表。縦軸が正解のファミリー、横軸が予測したファミリーである。

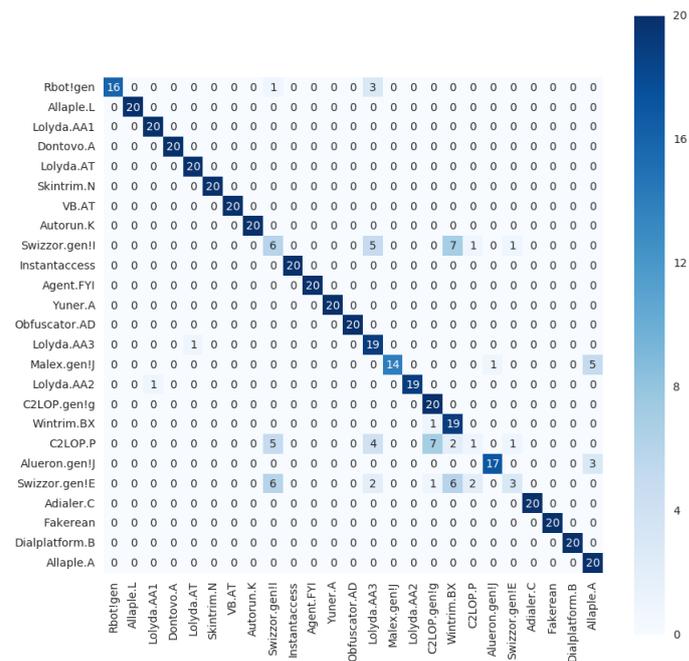


図2 テストデータを識別的辞書学習で得られた辞書でスパース表現し分類を行った結果の表。縦軸が正解のファミリー、横軸が予測したファミリーである。

表1は識別的辞書学習をした場合としなかった場合の正答率と計算時間の表である。識別的辞書学習のパラメータは十分ではなく改善の余地があるものの、分類の正答率は約2%下がったものの、計算時間が約78%削減できた。またどちらの手法でも Adialer.C や Fakerean は誤答がなく、C2LOP.P や Swizzor.gen!E は誤答が多く分類が難しいことがわかる。

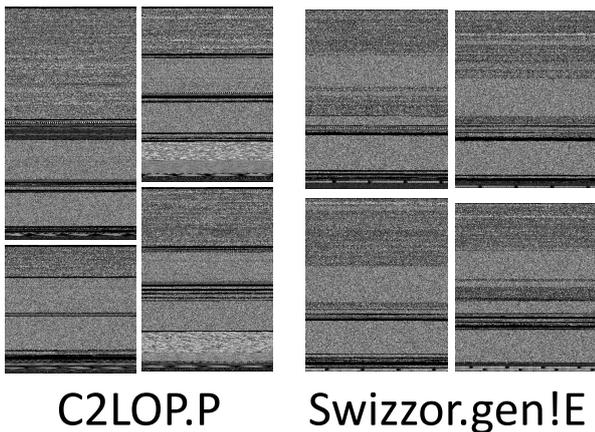


図 3 分類の誤りが多かった 2 つのファミリーからマルウェアを 4 つずつ画像化したもの。

図 3 は C2LOP.P と Swizzor.gen!E のマルウェアを画像化したものである。ファイルサイズがばらばらであったり、横線が入る位置がさまざまであることがわかる。辞書学習は一部の改変には頑健であるが、全体に大きな改変がある場合には辞書だけでスパース表現することは難しいため、誤りが多かったと考えられる。また、訓練データ数が他のファミリーと比べて少ないことも原因と考えられる。

#### 4.2 改変場所の特定

改変場所の特定には 4.1 の識別的辞書学習で得られた辞書とランダム射影で用いた  $512 \times 5,462,016$  のランダム行列を結合したものでスパース表現を行った。OMP では  $T = 80$ ,  $\sigma = 1.2$  に設定した。

テストデータのうち 1 つを実験した結果、辞書から 46 個、ランダム行列から 34 個のベクトルでスパース表現できた。選出されたランダム行列のベクトルの多くは、本来ランダム射影で使われていない、ファイルサイズ以上のベクトルであった。原因として同じファミリー内のマルウェアと比べてファイルサイズが変わっていたり、全体が少しずつずれていた場合、1 ビットでもずれていると改変場所とみなすことが挙げられる。また、ランダム行列がとても高次元のため高効率ランダム射影を用いても時間がかかる。

#### 5. 結論

本研究では、高効率ランダム射影と識別的辞書学習を用いてマルウェアをファミリーに分類する手法を提案した。実験の結果、識別的辞書学習を用いなかった場合と比べ、用いた場合が正答率が約 2% 低かったものの、計算時間を約 78% 削減することができた。改変場所の特定には、ランダム行列の中から関係のないベクトルが選ばれることが多く、検討が必要である。

#### 参考文献

- [1] Nataraj, L., Karthikeyan, S., Jacob, G. and Manjunath, B.: Malware images: visualization and automatic classification, *Proceedings of the 8th international symposium on visualization for cyber security*, ACM, p. 4 (2011).
- [2] Gibert Llauredó, D.: Convolutional neural networks for malware classification, Master's thesis, Universitat Politècnica de Catalunya (2016).
- [3] Nataraj, L., Karthikeyan, S. and Manjunath, B.: SATTVA: SpArsiTy inspired classificaTion of malware VARIants, *Proceedings of the 3rd ACM Workshop on Information Hiding and Multimedia Security*, ACM, pp. 135–140 (2015).
- [4] Sakai, T. and Imiya, A.: Practical Algorithms of Spectral Clustering: Toward Large-Scale Vision-Based Motion Analysis, *Machine Learning for Vision-Based Motion Analysis*, Advances in Pattern Recognition, Springer, chapter 1, pp. 3–26 (2011).
- [5] Zhang, Q. and Li, B.: Discriminative K-SVD for dictionary learning in face recognition, *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2010 IEEE Conference on*, IEEE, pp. 2691–2698 (2010).
- [6] Tropp, J. A.: Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation, *IEEE Transactions on Information theory*, Vol. 50, No. 10, pp. 2231–2242 (2004).
- [7] Pati, Y. C., Rezaiifar, R. and Krishnaprasad, P. S.: Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition, *Signals, Systems and Computers, 1993. 1993 Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on*, IEEE, pp. 40–44 (1993).
- [8] Wright, J., Yang, A. Y., Ganesh, A., Sastry, S. S. and Ma, Y.: Robust face recognition via sparse representation, *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, Vol. 31, No. 2, pp. 210–227 (2009).
- [9] Johnson, W. and Lindenstrauss, J.: Extensions of Lipschitz maps into a Hilbert space, *Contemporary Mathematics*, Vol. 26, pp. 189–206 (1984).
- [10] Santosh S, V.: *The Random Projection Method*, Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 65, American Mathematical Society (2004).
- [11] Aharon, M., Elad, M. and Bruckstein, A.: rmk-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation, *IEEE Transactions on signal processing*, Vol. 54, No. 11, pp. 4311–4322 (2006).