二人単貧民の必勝判定アルゴリズムとその拡張について

木谷 裕紀[,a)]　小野 廣隆[,b)]

概要：単貧民とは, 不完全情報多人数ゲームであるカードゲーム大貧民を完全情報ゲームとして簡易化したものである. 本研究では札の種類を一般化した二人単貧民の勝者決定について考察する. 単貧民は二人完全情報性から, カードが配られた 時点で先手後手のいずれかに必勝戦略が存在する. 本研究では手札の枚数の総数 n に対し, ソート後 $\mathcal{O}(n)$ 時間で二人単貧民の必勝プレイヤーとその必勝戦略を求めることができることを示す.

Deciding the winning player in two-player TANHINMIN and its variant

KIYA Hironori[,a)]　ONO Hirotaka[,b)]

Abstract: TANHINMIN is a game with perfect information. which is a simplied version of card game DAIHINMIN. In this paper, we consider a 2-player generalized TANHINMIN, where the size of deck is generalized. Since this variant of TANHINMIN is a 2-player game with perfect information, it has a winning strategy of either the first or the second player, but it does not necessarily mean that there is a simple and easy winning strategy. We show that it can be decided in $\mathcal{O}(n)$ time which player has a winning strategy.

1. はじめに

大貧民はトランプカードゲームの中でも全国的に認知度, 人気が高い遊びであり, 大富豪とも呼ばれる. このゲームは不完全情報多人数ゲームであり, 一般には最適戦略が存在しない, あるいは求めることが困難である. 近年, 将棋やオセロなどの完全情報ゲームに関する研究と共に, 大貧民のような不完全情報ゲームの研究も進んでいる. 2006 年度から毎年コンピューター大貧民大会が電気通信大学で開催され, 「強い」大貧民 AI の開発を競う場となっている. 2015 年, プロ棋士に対する勝利宣言がだされた将棋コンテスト同様, 日々コンピューター大貧民 AI の実力も向上しているがまだまだ成長の余地がある.

このような大貧民研究の一環として電気通信大学の西野は単貧民というゲームを定義した [1]. 単貧民は大貧民に

- 特殊ルールが一切存在しない,
- 1 枚出しのみを認める,
- 手札は公開で行われる,

という制約を課したものであり, 大貧民を単純化し，かつ完全情報多人数ゲーム化したものと言える.

本研究では 2 人で行う単貧民について扱う. 二人単貧民は完全情報型の 2 人ゲームとなるため, いずれかのプレイヤーに必勝戦略が常に存在する. しかし, 将棋や囲碁などを考えると明らかなように, 完全情報型の 2 人ゲームにおける必勝戦略の存在性とそれを具体的に知ることには大きな隔たりがある. これに対し著者らはこれまで二人単貧民においてゲームの開始時, あるいは場に札がない状況における具体的な必勝戦略を与える研究を行ってきた [3].

本研究ではアルゴリズムを修正を加えることで場に札がある状況においても与えられた手札の組からの必勝プレイヤー判定とその具体的な戦略を札の枚数 n に対してソート済みの手札であれば $\mathcal{O}(n)$ 時間で求めることができることを示す.

[1] 九州大学大学院 経済学府 経済工学専攻
Department of Economic Engineering, Kyushu University
[†1] 現在，名古屋大学大学院情報学研究科 数理情報学専攻
Presently with Department of Mathematical Informatics, Graduate School of Informatics, Nagoya University
[a)] kiya.hironori@gmail.com
[b)] ono@i.nagoya.ac.jp

2. 問題

2.1 単貧民のルール

まず二人単貧民を以下のようにモデル化する: 各プレイヤーの**手札集合**を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合の形で与える. 簡単のためそれぞれの手札集合は単純集合として説明するが, 多重集合であっても良い. また, 両プレイヤーが同じ値の札を持っていてもよい. プレイヤーに配布された札 (**手札**と呼ぶ) の札数は必ずしも等しくなくてよい. 札の番号は強さを表し, 大きいほど強いものとする. この設定の下, 以下の形でゲームを進める.

- 先手後手を決め, **先手プレイヤー**, **後手プレイヤー**の順に交代で, 手札から**場**に 1 枚ずつ札を出していく.
- 場は最初, 空である (0 の札がおかれていると考える).
- 順番のプレイヤーは, 手札の中から場の札の値よりも大きい値の札を 1 枚出すことができる. 出した札はそれまで出ていた札の上に置かれる（場に出ている札は今出した札に代わる）. このとき, 順番はもう一人のプレイヤーに移る.
- 順番のプレイヤーは, 手札を出さずに順番をもう一人のプレイヤーに譲ることができる (**パス**する, という). このとき場に出ている札は空になる (改めて, 0 の札がおかれる).
- いずれかのプレイヤーの手札がなくなった時点で終了であり, このとき手札を 0 枚にしたほうが勝ちである.

ゲームを通して順番は交互に移るが, それぞれの手札を出すタイミングを**手番**, ある時点で順番が来ているプレイヤーを**手番プレイヤー**, もう一人のプレイヤーを**非手番プレイヤー**と呼ぶ. また場が空の状態からいずれかのプレイヤーがパスをするまでを**巡**と呼ぶ.

以下ではこのゲームの必勝判定を考える.

3. 必勝判定法

本研究のアルゴリズムは著者らが過去に示したアルゴリズムをもとに作成, 証明を行う. 最初に, そのアルゴリズムについて説明する.

3.1 諸定義

まず諸変数を定義する. ゲームが進むことは手番が進むことを意味するので, 以下では手番を $t = 0, 1, 2, \ldots$ で参照する. A を先手プレイヤー, B を後手プレイヤーとする. つまり, A, B はそれぞれ $t = 0$ における手番プレイヤー, 非手番プレイヤーである. プレイヤー A, B は互いに対称な関係にあるので, プレイヤーを表す変数 X に対して, 一方を X としたとき, 他方を $\bar{X}$ で参照する. すなわち, $X = A$ のとき $\bar{X} = B$ であり, $X = B$ のとき $\bar{X} = A$ である. 手番 t における X, $\bar{X}$ の手札を $X[t] \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $\bar{X}[t] \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ で表す.

任意の手番 t に対して, 以下のような二部グラフを定義する:

$$G_X[t] = (X[t], \bar{X}[t], E_X[t]),$$

ただし,

$$E_X[t] = \{\{i, j\} \mid i \in X[t], j \in \bar{X}[t], i > j\}.$$

つまり, $G_X[t]$ は, プレイヤー X と $\bar{X}$ の手札の各札を点としたグラフであり, プレイヤー X の各手札から, その札が勝てるプレイヤー $\bar{X}$ の手札へ辺を引く形で定義されている.

このように定義したグラフ $G_X[t]$ においてマッチング辺は, プレイヤー $\bar{X}$ が出した札に対してプレイヤー X が札を出す関係を表しており, ゲームが進むことはそれぞれのグラフにおいてマッチング辺が抜かれていく状況を表している. 本研究で提案する判定法ではこれを利用するため, $G_X[t]$ の最大マッチングのサイズ $\mu_X[t]$ を定義する. この他に, 大貧民では比較的弱い, しかし使いようによっては順当に消費できる札を有効に切ることが重要になる. このような性質の札を定義するためいくつかの記号を導入する：

$$X^+[t] = \{v \in X[t] \mid d_{G_X[t]}(v) > 0\}.$$

ただし, $d_G(v)$ はグラフ G における点 v の次数を表す. これを用いて以下を定義する.

$$\begin{aligned} d^*(X^+[t]) &= \min\{d_{G_X[t]}(v) \mid v \in X^+[t]\}, \\ \min X^+[t] &= \{v \in X^+[t] \mid d_{G_X[t]}(v) = d^*(X^+[t])\}. \end{aligned}$$

以上を用いて次の値を定義する：

$$\nu_X[t] = d^*(X^+[t]) - |\min X^+[t]|.$$

つまり, $\nu_X[t]$ は $G_{X[t]} = \{V, E_a\}$ において孤立点でない頂点 $(X^+[t])$ のうち最も次数が小さいノードの次数 $(d^*(X^+[t]))$ からそのような頂点の数 $(|\min X^+[t]|)$ を引いたものを表す. また, マッチングがないときつまり $\mu_X[t]$=0 のとき $\nu_X[t] > 0$ とする. これらの値はいずれもそれぞれの手札がソートされていれば貪欲的な方法を用いることによって $\mathcal{O}(n)$ 時間で計算ができる. (二部マッチングアルゴリズム等を用いる必要はない). 本研究ではこれらの値を用いた必勝プレイヤー判定アルゴリズムを設計する.

3.2 空場での必勝判定法

定理 1. ある巡の開始時 t の手番プレイヤーを X とする. X は以下のいずれかを満たすとき, またそのときに限り, 必勝プレイヤーである.

- $\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$,
- $\mu_X[t] \geq \mu_{\bar{X}}[t]$, $\nu_X[t] > 0$,
- $\mu_X[t] \geq \mu_{\bar{X}}[t]$, $\nu_{\bar{X}}[t] = 0$,

- $\mu_X[t]+1=\mu_{\bar{X}}[t]$, $\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$.

この定理は，巡に関する帰納法により示すことができる．この定理から次が直ちに言える．

系 1. $\mu_A[0],\mu_B[0],\nu_A[0],\nu_B[0]$ を計算することにより，ソート後 $\mathcal{O}(n)$ 時間で二人単貧民の必勝プレイヤーとその必勝戦略を求めることができる．

表 1 ではこの勝利判定の条件をまとめている．

4. より簡潔な判定条件と空場への拡張

系 1，定理 1 により，手札が配られ，先手後手が決定した時点 (ゲーム開始時) での高速な勝敗判定，あるいは巡開始時での高速な勝敗判定が可能である．

表 1 に示す通りこの判定条件は 16 通りのパターンへの分類を利用する．これはゲームの性質を考えると十分簡潔であるとも言えるが，本節ではより簡潔な判定条件が存在することを証明する．なお，その新しい判定条件は，巡途中の手札からの判定も可能な一般的な拡張となっている．

4.1 証明の準備

以下では場に最後に出された札からなる集合を R とする．「最後に出された」札は 1 枚であるため $|R|=1$ である．まだ札が出されていない空場では仮想的に 0 の札が置かれているものとし，$R=\{0\}=R_0$ とする．ゲーム開始時の手番プレイヤー (以下では単に先手と呼ぶ) の手札集合を X, ゲーム開始時の非手番プレイヤー（以下では単に後手と呼ぶ）の手札集合を $\bar{X}$ とする．またプレイヤー X と $\bar{X}$ の上詰めマッチングのサイズを $\mu_X=\mu(X,\bar{X})$, $\mu_{\bar{X}}=\mu(X,\bar{X})$ とする．

4.2 結果と証明

定理 2. X を先手プレイヤー, $\bar{X}$ を非手番プレイヤーとする．このとき以下が成立する．$\mu(X,\bar{X}\setminus\min(\bar{X})+R)>\mu(\bar{X},X\setminus\min(X))$ を満たすときそしてそのときのみ X(手番プレイヤー) 必勝である．

以下ではこれを次の順に証明する:

(i) 空場において元のアルゴリズムと等価であることを示す．これに対応するのが補題 1, 補題 2, 補題 3 である．

(ii) 補題 2 を用いて空場においての後手必勝条件の必要十分条件を求める (補題 4).

(iii) 補題 4 を用いて先手の札に Z を一枚加えた場面での空場においての後手必勝の必要十分条件を求める (補題 5).

(iv) 補題 5 を用いて非手番プレイヤー X 必勝場面からどのような手札を出しても $\bar{X}$ 必敗であることを用いて非手番プレイヤー X 必勝局面から Z を出した局面が直後の手番プレイヤー X 必勝局面であることを示す．それが結果と等しいことを示す (補題 6, 定理 2).

まず空場において以下が成立する．

補題 1. 空場において，非手番プレイヤー $\bar{X}$ の手札が全てマッチされるマッチングが存在するとき, $\mu(X,\bar{X})=|X|$ が成立ならば, X 必勝である．

証明. $\mu(X,\bar{X})=|X|$ のとき, $\mu(\bar{X},X)$ について考えると $\nu_{\bar{X}}>0$ のとき $\mu(\bar{X},X)<|X|$.

$\nu_{\bar{X}}=0$ のとき, $\mu(\bar{X},X)\leq|X|$.

したがって定理 1 より $\mu(X,\bar{X})=|X|$ のとき先手必勝. □

これを用いることにより，以下の補題を示すことができる．

補題 2. $R=\{0\}$(空場) では，手番プレイヤー X 必勝であるならば $\mu(X,\bar{X}\setminus\min(\bar{X})+R)>\mu(\bar{X},X\setminus\min(X))$ を満たす．

証明. $\mu(X,\bar{X})=|X|$ ならば補題 1 より X 必勝である．したがって以下では $\mu(X,\bar{X})<|X|$ の場合を考える．

(i) $\nu_X=0$ のとき $\mu(X,\bar{X})\neq 0$ より $\min(\bar{X})$ に対するマッチングを R に対して変えることが可能なので

$$\mu(X,\bar{X}\setminus\min(\bar{X})+R)=\mu(X,\bar{X}).$$

同様に $\nu_{\bar{X}}=0$ のとき $\mu(\bar{X},X)\neq 0$ が成立するので,

$$\mu(\bar{X},X\setminus\min(X))=\mu(\bar{X},X)-1.$$

(ii) $\nu_X>0$ が成立するときは, $\mu(X,\bar{X})$ に関する場合分けを行う．(ii-1) $\mu(X,\bar{X})=0$ のとき:

$$\mu(X,\bar{X}\setminus\min(\bar{X})+R)=1.$$

(ii-2) $\mu(X,\bar{X})\neq 0$ のとき, $\mu(X,\bar{X})<|X|$ より

$$\mu(X,\bar{X}\setminus\min(\bar{X})+R)=\mu(X,\bar{X})+1.$$

同様に (iii)$\nu_{\bar{X}}>0$ のとき, (iii-1)$\mu(\bar{X},X)=0$ のとき

$$\mu(\bar{X},X\setminus\min(X))=0.$$

(iii-2)$\mu(\bar{X},X)\neq 0$ のとき,　$\mu(\bar{X},X)<|\bar{X}|$ より

$$\mu(\bar{X},X\setminus\min(X))=\mu(\bar{X},X)$$

以上より, 定理 1 と合わせると以下が成立する．$\mu_X>\mu_{\bar{X}}$ ならば

$$\mu(X,\bar{X}-\min(\bar{X})+R_0)\geq\mu_X>\mu_{\bar{X}}\geq\mu(\bar{X},X-\min(X)),$$

$\mu_X\geq\mu_{\bar{X}}$, $\nu_X>0$ ならば

$$\mu(X,\bar{X}\setminus\min(\bar{X})+R)>\mu_X\geq\mu_{\bar{X}}\geq\mu(\bar{X},X-\min(X)),$$

$\mu_X\geq\mu_{\bar{X}}$, $\nu_{\bar{X}}=0$ ならば

$$\mu(X,\bar{X}-\min(\bar{X})+R_0)=\mu_X\geq\mu_{\bar{X}}>\mu(\bar{X},X-\min(X)),$$

	$\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t]+1 = \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t]+1 = \mu_{\bar{X}}[t]$
$\nu_X[t], \nu_{\bar{X}}[t] = 0$	X 必勝	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝
$\nu_X[t] = 0, \nu_{\bar{X}}[t] > 0,$	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝
$\nu_X[t] > 0, \nu_{\bar{X}}[t] = 0,$	X 必勝	X 必勝	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝
$\nu_X[t], \nu_{\bar{X}}[t] > 0$	X 必勝	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝

表 1 勝者判定表

$\mu_X + 1 = \mu_{\bar{X}}, \nu_X > 0, \nu_{\bar{X}} = 0$ ならば

$$\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + R_0) = \mu_X + 1 = \mu_{\bar{X}} > \mu(\bar{X}, X - \min(X))$$

が成立する．

以上から，X 必勝ならば $\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + R_0) > \mu(\bar{X}, X - \min(X))$ である． □

補題 3. $R = \{0\}$(空場) では，$\mu(X, \bar{X} \setminus \min(\bar{X}) + R) > \mu(\bar{X}, X \setminus \min(X))$ を満たすとき手番プレイヤー X 必勝である．

証明. 定理 1 より

(i) $\mu_X + 1 < \mu_{\bar{X}}$
(ii) $\mu_X < \mu_{\bar{X}}, \nu_X = 0$
(iii) $\mu_X < \mu_{\bar{X}}, \nu_{\bar{X}} > 0$
(iv) $\mu_X = \mu_{\bar{X}}, \nu_X = 0, \nu_{\bar{X}} > 0$

以上のとき, またそのときのみ $\bar{X}$ 必勝である．これらにおいては条件式が不成立となることを示す．

(i) $\mu_X + 1 < \mu_{\bar{X}}$ のとき，$\mu_X + 1 \leq \mu_{\bar{X}} - 1$ である．よって，

$$\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + R_0) \leq \mu_X + 1 \leq \mu_{\bar{X}} - 1 \leq \mu(\bar{X}, X - \min(X)),$$

となる．

(ii) $\mu_X < \mu_{\bar{X}}, \nu_X = 0$ のとき

$$\mu(X, \bar{X} \setminus \min(\bar{X}) + R) = \mu_X \leq \mu_{\bar{X}} - 1 \leq \mu(\bar{X}, X - \min(X)),$$

となる．

(iii) $\mu_X < \mu_{\bar{X}}, \nu_{\bar{X}} > 0$ のとき

$$\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + R_0) \leq \mu_X + 1 \leq \mu_{\bar{X}} = \mu(\bar{X}, X - \min(X))$$

となる．

(iv) $\mu_X = \mu_{\bar{X}}, \nu_X = 0, \nu_{\bar{X}} > 0$ のとき

$$\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + R_0) = \mu_X = \mu_{\bar{X}} = \mu(\bar{X}, X - \min(X)),$$

が成立する．

以上 $\bar{X}$ 必勝ならば

$$\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + R_0) \leq \mu(\bar{X}, X - \min(X).$$

となるため，本補題が示された． □

2，3 より，空場における X 必勝の必要十分条件は $\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + R_0) > \mu(\bar{X}, X - \min(X)$ である．

補題 2, 3 及び単貧民に千日手はないことから以下の補題が成立する．ただし，この補題では X が後手, $\bar{X}$ が先手であることに注意されたい．

補題 4. X を非手番プレイヤーとする．$\mu(\bar{X}, X - \min(X) + R_0) \leq \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}))$ が成立するときそしてそのときのみ X 必勝である．

次に先手の札に Z を一枚加えた場面での空場においての後手必勝の必要十分条件を求める．

補題 5. $Z \neq 0$ を満たす任意の $Z(|Z| = 1)$ において，X が非手番プレイヤー，$\bar{X}$ が手番プレイヤーのとき $\mu(\bar{X} + Z, X - \min(X) + R_0) < \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + Z)$ と X 必勝が等価である．

証明. $(|Z| = 1)$ より以下の 4 つの場合のみを考えればよい．

- (i)$\mu(\bar{X} + Z, X - \min(X) + R_0) = \mu(\bar{X}, X - \min(X) + R_0)$ が成立するかつ，$\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + Z) = \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}))$ が成立する．
- (ii)$\mu(\bar{X} + Z, X - \min(X) + R_0) = \mu(\bar{X}, X - \min(X) + R_0) + 1$ が成立するかつ，$\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + Z) = \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X})) + 1$ が成立する．
- (iii) $\mu(\bar{X} + Z, X - \min(X) + R_0) = \mu(\bar{X}, X - \min(X) + R_0)$ が成立するかつ，$\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + Z) = \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X})) + 1$ が成立する．
- (iv)$\mu(\bar{X} + Z, X - \min(X) + R_0) = \mu(\bar{X}, X - \min(X) + R_0) + 1$ が成立するかつ，$\mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + Z) = \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}))$ が成立する．

以下では上記いずれの場合においても $\mu(\bar{X} + Z, X - \min(X) + R_0) < \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + Z)$ ならば X 必勝であることを示す．

・(i) のとき

$\mu(\bar{X} + Z, X - \min(X) + R_0) < \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + Z)$ のとき

$\mu(\bar{X}, X - \min(X) + R_0) \leq \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}))$ が成立するので後手必勝である．

・(ii) のとき

$\mu(\bar{X} + Z, X - \min(X) + R_0) < \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}) + Z)$ のとき

$\mu(\bar{X}, X - \min(X) + R_0) \leq \mu(X, \bar{X} - \min(\bar{X}))$ が成立するので後手必勝である．

・(iii) のとき

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ のとき

$\mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立するので後手必勝である.

・(iv) のとき

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ のとき

$\mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立するので後手必勝である.

したがって (i), (ii), (iii), (iv) のいずれの場合でも $\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ ならば X 必勝である.

よって $\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ ならば X 必勝である.

続いて先手を X としたとき, X 必勝であるならば

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ が成立することを以下では示す.

補題より X 必勝であるならば $\mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立するので

$\mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立するなら

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ が成立することを以下では示す.

同様に以下の 4 つの場合

- (i)$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) = \mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0)$ が成立するかつ, $\mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z) = \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立する.
- (ii)$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) = \mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0)+1$ が成立するかつ, $\mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z) = \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))+1$ が成立する.
- (iii) $\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) = \mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0)$ が成立するかつ, $\mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z) = \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))+1$ が成立する.
- (iv)$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) = \mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0)+1$ が成立するかつ, $\mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z) = \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立する.

について考察する.

$\mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立するなら

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ が成立することを以下では示す.

・(i) のとき

$\mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立するとき

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) = \mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})) = (X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$.

よって $\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ が成立する.

・(ii) のとき

$\mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立するとき

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) = \mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0)+1 \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))+1 = (X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$.

よって $\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ が成立する.

・(iii) のとき

$\mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立するとき

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) = \mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))+1 = (X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$

よって $\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ が成立する.

・(iv) のとき

$\mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0) \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X}))$ が成立するとき

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) = \mu(\bar{X}, X-\min(X)+R_0)+1 \leq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})) = (X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$

以上 (i), (ii), (iii), (iv) より

$\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ ならば X 必勝である. □

補題 5 より以下の補題が成立する.

補題 6. X が先手プレイヤー $\bar{X}$ が後手プレイヤーとする. $\mu(X, \bar{X}\setminus\min(\bar{X})+Z) > \mu(\bar{X}, X\setminus\min(X))$ の必要十分条件は X 必勝である.

証明. $\mu(X, \bar{X}\setminus\min(\bar{X})+Z) > \mu(\bar{X}, X\setminus\min(X))$ のとき必勝でないとする.

このとき $\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) < \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ を満たす局面は X 必勝局面なので手番プレイヤー $\bar{X}$ はどのような手を場に出しても勝てない. したがって場に Z を出した局面ならば $\mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z) > \mu(\bar{X}, X-\min(X))$ が成立する. このとき先手 (手番プレイヤー, X) 必勝である. したがって矛盾. したがって $\mu(X, \bar{X}\setminus\min(\bar{X})+Z) > \mu(\bar{X}, X\setminus\min(X))$ のとき先手必勝である.

$\mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z) \leq \mu(\bar{X}, X-\min(X))$ が後手必勝でないとする.

このとき補題 5 より $\mu(\bar{X}+Z, X-\min(X)+R_0) \geq \mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z)$ と $\bar{X}$ 必勝が同値であるため

その場面から Z を出した局面 $\mu(X, \bar{X}-\min(\bar{X})+Z) \leq \mu(\bar{X}, X-\min(X))$ は $\bar{X}$ 必勝である. したがって矛盾. したがって $\bar{X}$ が先手 X が後手プレイヤーとしたとき, $\mu(X, \bar{X}\setminus\min(\bar{X})+Z) > \mu(\bar{X}, X\setminus\min(X))$ の必要十分条件は X 必勝である. □

補題 6 より定理 2 が成立することが示された.

5. まとめ

本研究では, 組合せゲームである二人単貧民の必勝プレイヤー判定とその必勝戦略導出を扱った. 単貧民自体は大貧民解析のための足がかりとして定義された簡易版であり, また真の困難性は多人数版にあるが, そういった, より一般化した設定でのアルゴリズム設計に, 本研究で提案したアルゴリズムがサブルーチンとして有効に機能することを期待している.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 17H01698，17K19960，26540005，26241031 の助成を受けたものである. また, 本研究を進めるにあたり, HEROZ 株式会社の大渡勝己氏には本研究に関する大変有益なコメントをいくつもいただいたことに関してここに謝意を表します.

参考文献

[1] 西野順二: 単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察 (“An analysis on TANHINMIN game”), ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集, pp. 66 – 73, 2007.
[2] 木谷裕紀, 小野廣隆: 単貧民における必勝戦略と必勝判定問題に関する考察, 火の国情報シンポジウム 2016 論文集, 3B-3, 2016.
[3] 木谷裕紀, 小野廣隆: 二人単貧民の必勝判定問題, 火の国情報シンポジウム 2017 論文集, B5-4, 2017.

