二人単貧民の必勝判定問題

木谷 裕紀^{a)} 小野 廣隆^{b)}

概要: 単貧民とは、不完全情報多人数ゲームであるカードゲーム大貧民を完全情報ゲームとして簡易化したものである。本研究では札の種類を一般化した二人単貧民の勝者決定について考察する。単貧民は二人完全情報性から、カードが配られた時点で先手後手のいずれかに必勝戦略が存在する。本研究では手札の枚数の総数 n に対し、 $\mathcal{O}(n \log n)$ 時間で二人単貧民の必勝プレイヤーとその必勝戦略を求めることができることを示す。

Winner Decision for Two Player TANHINMIN

KIYA HIRONORI^{a)} ONO HIROTAKA^{b)}

Abstract: TANHINMIN is a game with perfect information, which is a simplified version of card game DAIHINMIN. In this paper, we consider a 2-player generalized TANHINMIN, where the size of deck is generalized. Due to the perfect information, 2-player TANHINMIN has a winning strategy of either the first moved player or the second moved player. We propose an algorithm of deciding the winner. It finds a winning strategy in time $\mathcal{O}(n \log n)$, where n is the total number of cards.

1. はじめに

大貧民はトランプカードゲームの中でも全国的に認知度、人気が高い遊びであり、大富豪とも呼ばれる。このゲームは不完全情報多人数ゲームであり、一般には最適戦略が存在しない、あるいは求めることが困難である。近年、将棋やオセロなどの完全情報ゲームに関する研究と共に、大貧民のような不完全情報ゲームの研究も進んでいる。2006年度から毎年コンピューター大貧民大会が電気通信大学で開催され、「強い」大貧民 AI の開発を競う場となっている。2015年、プロ棋士に対する勝利宣言がだされた将棋コンテスト同様、日々コンピューター大貧民 AI の実力も向上しているがまだまだ成長の余地がある。

このような大貧民研究の一環として電気通信大学の西野は単貧民というゲームを定義した [1]。単貧民は大貧民に

- 特殊ルールが一切存在しない、
- 1枚出しのみを認める、
- 手札は公開で行われる、

という制約を課したものであり、大貧民を単純化し、かつ完全情報多人数ゲーム化したものと言える。

本研究では2人で行う単貧民について扱う。二人単貧民は完全情報型の2人ゲームとなるため、いずれかのプレイヤーに必勝戦略が常に存在する。しかし、将棋や囲碁などを考えると明らかのように、完全情報型の2人ゲームにおける必勝戦略の存在性とそれを具体的に知ることは大きな隔りがある。これに対し著者らはこれまで二人単貧民において最初に配られた手札が同一である場合等、単純なケースにおいての具体的な必勝戦略を与える研究を行ってきた [2]。

本研究では二人単貧民において、与えられた手札の組からの必勝プレイヤー判定とその具体的な戦略を札の枚数 n に対して $\mathcal{O}(n \log n)$ 時間で求めることができることを示す。

¹ 九州大学大学院 経済学府 経済工学専攻
Department of Economic Engineering, Kyushu University
^{†1} 現在、九州大学大学院 経済学府 経済工学部門
Presently with Department of Economic Engineering,
Kyushu University
^{a)} msc17.lvr93@gmail.com
^{b)} hirotaka@econ.kyushu-u.ac.jp

2. 準備

2.1 単貧民のルール

まず二人単貧民を以下のようにモデル化する: 各プレイヤーの手札集合を $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合の形で与える (簡単のためそれぞれの手札集合は単純集合として説明するが, 多重集合であっても良い. また, 両プレイヤーが同じ値の札を持っていてもよい). プレイヤーに配布された札 (手札と呼ぶ) の札数は必ずしも等しくなくてよい. 札の番号は強さを表し, 大きい値ほど強いものとする. この設定の下, 以下の形でゲームを進める.

- 先後手を決め, 先手プレイヤー, 後手プレイヤーの順に交代で, 手札から場に 1 枚ずつ札を出していく.
- 場は最初, 空である (0 の札がおかれていると考える).
- 順番のプレイヤーは, 手札の中から場の札よりも強い札を 1 枚出すことができる. 出した札はそれまで出ていた札の上に置かれる (場に出ている札は今出した札に代わる). このとき, 順番はもう一人のプレイヤーに移る.
- 順番のプレイヤーは, 手札を出さずに順番をもう一人のプレイヤーに譲ることができる (パスする, という). このとき場に出ている札は空になる (改めて, 0 の札がおかれる).
- いずれかのプレイヤーの手札がなくなった時点で終了であり, このとき手札を 0 枚にしたほうが勝ちである. ゲームを通して順番は交互に移るが, それぞれの手札を出すタイミングを手番, ある時点で順番が来ているプレイヤーを手番プレイヤー, もう一人のプレイヤーを相手プレイヤーと呼ぶ. また場が空の状態からいずれかのプレイヤーがパスをするまでを巡と呼ぶ.

以下ではこのゲームの必勝判定を考える.

2.2 諸定義

諸定義を行う. ゲームが進むことは手番が進むことを意味するので, 以下では手番を $t = 0, 1, 2, \dots$ で参照する. A を先手プレイヤー, B を後手プレイヤーとする. つまり, A, B はそれぞれ $t = 0$ における手番プレイヤー, 相手プレイヤーである. プレイヤー A, B は互いに対称な関係にあるので, プレイヤーを表す変数 X に対して, 一方を X としたとき, 他方を $\bar{X}$ で参照する. すなわち, $X = A$ のとき $\bar{X} = B$ であり, $X = B$ のとき $\bar{X} = A$ である. 手番 t における $X, \bar{X}$ の手札を $X[t] \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, \bar{X}[t] \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ で表す. また, $X[t]$ の札を強い順に $x_1[t], x_2[t], \dots$ で参照する.

任意の手番 t に対して, 以下のような二部グラフを定義する:

$$G_X[t] = (X[t], \bar{X}[t], E_X[t]),$$

ただし,

$$E_X[t] = \{\{i, j\} \mid i \in X[t], j \in \bar{X}[t], i > j\}.$$

つまり, $G_X[t]$ は, プレイヤー X と $\bar{X}$ の手札の各札を点としたグラフであり, プレイヤー X の各手札から, その札が勝てるプレイヤー $\bar{X}$ の手札へ辺を引く形で定義されている.

このように定義したグラフ $G_X[t]$ においてマッチング辺は, プレイヤー $\bar{X}$ が出した札に対してプレイヤー X が札を出す関係を表しており, ゲームが進むことはそれぞれのグラフにおいてマッチング辺が抜かれていく状況を表している. 本研究で提案する判定法ではこれを利用するため, $G_X[t]$ の最大マッチングのサイズ $\mu_X[t]$ を定義する. カードの強さが全順序的であることから, 最大マッチングはそれぞれの手札がソートされていれば次のような貪欲法により線形時間で計算することができる:

X の手札でまだマッチされていない一番強い札 x と, まだマッチされていない $\bar{X}$ の手札で x より弱い札があれば, その中で最も強い札をマッチする. これを繰り返し, まだマッチされていない $\bar{X}$ の手札で x より弱い札が存在しなくなった時点で終了.

以下では, $G_X[t]$ あるいは $G_{\bar{X}}[t]$ における最大マッチングは上のアルゴリズムで求められたものとし, 上詰めマッチング $M_X[t]$ と呼ぶ. このアルゴリズムの正当性と (ソート後の) 線形時間での実行可能性の証明は省略する. このマッチングにおいて, X 側の札は強い順に $\mu_X[t]$ 番目までがマッチされており, その $\mu_X[t]$ 番目の札を $w_X[t]$ とする. 大貧民では, この $w_X[t]$ のように比較的弱い, しかし使いようによっては順当に消費できる札を有効に切ることが重要になる. $\bar{X}$ において, この $w_X[t]$ とマッチされている頂点を $M_X(w_X)[t]$ とし, $\bar{X}[t]$ においてこれよりも弱い札の枚数を $\nu_X[t]$ で表す. すなわち,

$$\nu_X[t] = |\{v \in \bar{X} \mid v < M_X(w_X)[t]\}|.$$

である. また, マッチングがないときつまり $\mu_X[t]=0$ のとき $\nu_X[t] > 0$ とする.

3. 主結果

定理 1. ある巡の開始時 t の手番プレイヤーを X とする. X は以下のいずれかを満たすとき, またそのときに限り, 必勝プレイヤーである.

- (1) $\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$,
- (2) $\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t], \nu_X[t] > 0$,
- (3) $\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t], \nu_{\bar{X}}[t] = 0$,
- (4) $\mu_X[t] + 1 = \mu_{\bar{X}}[t], \nu_X[t] > 0, \nu_{\bar{X}}[t] = 0$.

この定理から二人単貧民の勝者決定に関する次が直ちに成立する.

系 1. $\mu_A[0], \mu_B[0], \nu_A[0], \nu_B[0]$ を計算することにより,

$O(n \log n)$ 時間で二人単貧民の必勝プレイヤーとその必勝戦略を求めることができる。

表 1 ではこの勝利判定の条件をまとめている。
以下ではこれを示すための補題を順に示す。

3.1 証明

まず、基本的な補題を示す。

補題 1. 手番 t における手番プレイヤーを X とし、また $u < v$ とする。場の札が v であるとき X 必勝→場の札が u であるとき X 必勝が成立。場の札が u であるとき $\bar{X}$ 必勝→場の札が v であるとき $\bar{X}$ 必勝が成立

証明. 場の札が v であるとき X は戦略 y をとることによって X 必勝とする。このとき場の札が u であっても $u < v$ より先手は戦略 y をとることができる。従って X 必勝同様に場の札が u であるとき $\bar{X}$ が戦略 z をとることによって $\bar{X}$ 必勝とするこのとき場の札が v であっても $u < v$ より先手は戦略 v をとることができる。従って $\bar{X}$ 必勝。 □

また、この補題より以下が直ちに成立

系 2. 場の札が v であるとき X 必勝→場が空であるとき X 必勝が成立。場が空であるとき $\bar{X}$ 必勝→場の札が v であるとき $\bar{X}$ 必勝が成立

また以下の補題が成立

補題 2. $\mu_X[t] = 0$ であるとき、 $\max(X[t]) \leq \min(\bar{X}[t])$ 。

証明. $\max(X[t]) > \min(\bar{X}[t])$ であるとき、グラフ $G_X[t]$ には辺が存在するため、 $\mu_X[t] = 0$ とはなりえない。すなわち、 $\mu_X[t] = 0$ ならば $\max(X[t]) \leq \min(\bar{X}[t])$ である。 □

補題 3. ある巡開始時の手番 t における手番プレイヤーを X とする。このとき (i) $\mu_X[t] = |X[t]|$ ならば X 必勝。また、(ii) $\mu_{\bar{X}}[t] = |\bar{X}[t]|$ かつ、 $\nu_{\bar{X}}[t] \geq 1$ ならば $\bar{X}$ 必勝。

証明. $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に関する帰納法により示す。 $\mu_X[t] = 1$ のとき $\mu_X[t] = |X[t]|$ とする。このとき手番プレイヤー X は 1 枚の手札を出すと X の手札がなくなるため、 X 必勝、(i) が成立する。また $\mu_{\bar{X}}[t] = 1$ のとき、 $\mu_{\bar{X}}[t] = \bar{X}[t] = 1$ かつ $\nu_{\bar{X}}[t] \geq 1$ とする。すなわち $X[t] = \{w_X[t]\}$ である。このとき $|X[t]| \geq |N(w_X[t])| = \nu_X[t] + 1 \geq 2$ である。つまり、先手プレイヤー X が $N(w_X[t])$ にある札を出したとしても X は手札を $|N(w_X[t])| - 1 \geq 1$ 枚以上の札をもっている、これに対し、 $\bar{X}$ は次の手順で $w_X[t]$ を出して手札をなくすことができるため、 $\bar{X}$ の勝ちとなり、(ii) が成立する。

次に、ある $k > 0$ が存在して、 $\mu_X \leq k$ ならば (i) が、 $\mu_{\bar{X}} \leq k$ ならば (ii) が成立するとする。このとき、 $\mu_X = k + 1$ のとき、(i) が成立することを、 $\mu_{\bar{X}} = k + 1$ のとき、(ii) が成立することを示す。まず前者から示す。

$\mu_X[t] = |X[t]| = k + 1$ のとき、手番 t で X は最も弱い札 ($w_X[t]$) を出すことにする。このとき、 $w_X[t]$ がなくなり $w_X[t]$ とマッチしていた $\bar{X}$ の頂点の存在から、手番 $t + 1$ では $\mu_X[t + 1] = \mu_X[t] - 1 = |X[t]| - 1 = |X[t + 1]| = k$ 、 $\nu_X[t + 1] \geq 1$ となる。このとき、 $t + 1$ の手番プレイヤーは $\bar{X}$ であるため、(ii) の条件から $\bar{X} = X$ 必勝となり、 $k + 1$ においては (i) が成立する。

後者は、 $\mu_{\bar{X}}[t] = |\bar{X}[t]| = k + 1$ のとき、手番 t で相手プレイヤー X が出す札が $G_{\bar{X}}[t]$ の上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れない札であった場合、パスを選択することで上詰めマッチングは変化しない。よって引き続き、 $\mu_{\bar{X}}[t + 1] = |\bar{X}[t + 1]| = \mu_{\bar{X}}[t] = |\bar{X}[t]|$ となる。手番 t で相手プレイヤー X が出す札が $G_{\bar{X}}[t]$ の上詰めマッチングに現れている札である場合、手番 $t + 1$ においてマッチングしている手を出すことによって手番 $t + 2$ において場に札がある状態で $\mu_{\bar{X}}[t + 2] = |\bar{X}[t + 2]| = \mu_{\bar{X}}[t] - 1 = |\bar{X}[t]| - 1 = k$ かつ、 $\nu_{\bar{X}}[t] \geq 1$ が成立している。

手番 t で相手プレイヤー X が出す札が $M_{\bar{X}}(w_{\bar{X}})[t]$ に現れる札である場合 (w_X)[t] を出すことによって $\nu_{\bar{X}} \geq 1$ であるため、手番 $t + 2$ において、 $G_{\bar{X}}[t + 2]$ でも $\mu_{\bar{X}}[t + 2] = |\bar{X}[t + 2]| = \mu_{\bar{X}}[t] - 1 = |\bar{X}[t]| - 1 = k$ かつ、 $\nu_{\bar{X}}[t] \geq 1$ が成立するため、手番 $t + 1$ の手番プレイヤー $\bar{X}[t]$ の必勝となり、(ii) が成立する。以上より、帰納法により任意の $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に対して (i), (ii) が成立する。 □

以上の補題 1, 2, 3 を用いることによって補題 4, 5, 6, 7 を示すことができる。また、この補題 4 から 7 を示すことによって定理が示される。

補題 4. ある巡開始時の手番 t における手番プレイヤーを X とする。このとき、(i) $\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$ ならば X 必勝。(ii) $\mu_X[t] < \mu_{\bar{X}}[t] - 1$ ならば $\bar{X}$ 必勝。

証明. $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に関する帰納法を用いて示す。まず、 $\mu_X[t] = 1$ のとき、(i) が、 $\mu_{\bar{X}}[t] = 2$ のとき、(ii) が成立することをしめす。前者に関しては、 $\mu_X[t] = 1$ のとき $\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$ であるとする、 $\mu_{\bar{X}}[t] = 0$ 。すなわち、(手札が減る一方であることを考えると) $\bar{X}$ はこれ以降一枚も手札を出すことができないため、 X 必勝である。後者に関しては、 $\mu_X[t] < \mu_{\bar{X}}[t] - 1$ のとき、すなわち、 $\mu_X[t] = 0, \mu_{\bar{X}}[t] = 2$ のとき、補題 2 から X の手札は 2 枚以上あるにもかかわらずそのすべてが $\bar{X}$ の手札に対して勝つことができない札なので $\bar{X}$ 必勝である。

次に、ある $k > 0$ が存在して、 $\mu_X \leq k$ ならば (i) が、 $\mu_{\bar{X}} - 1 \leq k$ ならば (ii) が成立するとする。このとき、 $\mu_X = k + 1$ のとき、(i) が成立することを、 $\mu_{\bar{X}} = k + 1$ のとき、(ii) が成立することを示す。

まず前者から示す。 $\mu_X[t] = |X[t]| = k + 1$ のとき、 $\mu_X[t] = |X[t]|$ のときは補題 1 より X 必勝。したがって以下では手番 t で X が $w_X[t]$ より弱い札を保有していると

	$\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] + 1 = \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] + 1 = \mu_{\bar{X}}[t]$
$\nu_X[t], \nu_{\bar{X}}[t] = 0$	X 必勝	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝
$\nu_X[t] = 0, \nu_{\bar{X}}[t] > 0,$	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝
$\nu_X[t] > 0, \nu_{\bar{X}}[t] = 0,$	X 必勝	X 必勝	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝
$\nu_X[t], \nu_{\bar{X}}[t] > 0$	X 必勝	X 必勝	$\bar{X}$ 必勝	$\bar{X}$ 必勝

表 1 勝者判定表

きを考える。手番 t において X は $\mu_X[t]+1$ 番目に強い札を出す。このとき、 X のマッチング構造は変わらないため $\mu_X[t] = \mu_X[t+1]$ である。ここで $\bar{X}$ がパスを選択した場合パスを選択しなくなるか $\mu_X[t+h] = |X[t+h]|$ となるまでこの操作を繰り返す。 $\mu_X[t+h] = |X[t+h]|$ となれば X 必勝なのでパスを選択しないケースを考えるがこのとき $\bar{X}$ が出した札が上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札であった場合パスを選択することで手番 $t+2$ において $\bar{X}$ が空場で手番になるが $\mu_X[t+2] = \mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t+2]+1$ となり仮定より X 必勝。 $\bar{X}$ が出した札が上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れた札であった場合その度にマッチングしている札を出すことによって $M_X[t+2m+1]$ (m は正の整数) 巡において $\bar{X}$ はパスを選択するか上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札を出すかどちらかであるが $\bar{X}$ がパスを選択した場合は $\mu_X[t+2m+2] = \mu_X[t] - m > \mu_{\bar{X}}[t] - m = \mu_{\bar{X}}[t+2m+2]$ で空場で X の手番になるので仮定より (i) は成立。上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札を出した場合も、それにパスすることによって $\mu_X[t+2m+3] = \mu_X[t] - m > \mu_{\bar{X}}[t] - m = \mu_{\bar{X}}[t+2m+3]+1$ で $\bar{X}$ の手番となるので仮定より (i) は成立。

後者は、手番 t において X が上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れる札を出した場合そのマッチングしている札を手番 $t+1$ に出すことによってその札が相手にとってマッチングしていない札であれば $\mu_X[t+2] < \mu_{\bar{X}}[t+2]$ で $\bar{X}$ の手番になるので $\bar{X}$ 必勝。マッチングしている札であれば $\mu_X[t] - 1 = \mu_X[t+2] < \mu_{\bar{X}}[t+2] - 1$ で場に札がある状態なので $\bar{X}$ 必勝。したがって上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れる札を出した場合 (ii) が成立。

上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れない札を出した場合パスを選択することによって手番 $t+1$ において手番はかわらず $\mu_{\bar{X}} = k+1$ の状態になるがこれは有限界しか起こらない。したがって (ii) は成立。以上より、帰納法により任意の $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に対して (i), (ii) が成立する。 □

補題 5. ある巡開始時の手番 t における手番プレイヤーを X とする。このとき、(i) $\mu_X = \mu_{\bar{X}}$ 且つ $\nu_X, \nu_{\bar{X}} = 0$ ならば X 必勝 (ii) $\mu_X + 1 = \mu_{\bar{X}}$ 且つ $\nu_X, \nu_{\bar{X}} = 0$ ならば $\bar{X}$ 必勝。

証明. $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に関する帰納法を用いて示す。まず、 $\mu_X[t] = 1$ のとき、(i) が、 $\mu_{\bar{X}}[t] = 2$ のとき、(ii) が成立することをしめす。($\mu_{\bar{X}}[t] = 1$ のときは $\nu > 0$ となるので (ii) は成立しない。) 前者に関しては、 $\mu_X[t] = 1$ のとき $\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$ であるとすると、 $\mu_{\bar{X}}[t] = 1$ 。且つ $\nu_X, \nu_{\bar{X}} = 0$

すなわち、(手札が減る一方であることを考えると) $\bar{X}$ はこれ以降 X の一枚を除いて一回も手札を出すことができないため、 X はその札つまり一番弱い札を最後に出すことによって必勝である。後者に関しては、 $\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$ のとき、すなわち、 $\mu_X[t] = 1, \mu_{\bar{X}}[t] = 2$ のとき、 X の手札は 2 枚 $\bar{X}$ にマッチングされている手札を持つ。また $\bar{X}$ の手札のうち一枚しかマッチングしている手がない。 X はマッチングされているいずれかの手を出したときに $\bar{X}$ は大きいほうから札を出すことによって全ての手札を出し切ることができるので $\bar{X}$ 必勝。

次に、ある $k > 0$ が存在して、 $\mu_X \leq k$ ならば (i) が、 $\mu_{\bar{X}} \leq k$ ならば (ii) が成立するとする。このとき、 $\mu_X = k+1$ のとき、(i) が成立することを、 $\mu_{\bar{X}} = k+1$ のとき、(ii) が成立することを示す。

まず前者から示す。 $\mu_X[t] = |X[t]| = k+1$ のとき、 $\mu_X[t] = |X[t]|$ のときは補題 1 より X 必勝。したがって以下では手番 t で X が $w_X[t]$ より弱い札を保有しているときを考える。手番 t において X は $\mu_X[t]+1$ 番目に強い札を出す。このとき、 X のマッチング構造は変わらないため $\mu_X[t] = \mu_X[t+1]$ である。ここで $\bar{X}$ がパスを選択した場合パスを選択しなくなるか $\mu_X[t+h] = |X[t+h]|$ となるまでこの操作を繰り返す。 $\mu_X[t+h] = |X[t+h]|$ となれば X 必勝なのでパスを選択しないケースを考えるがこのとき $\bar{X}$ が出した札が上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札であった場合パスを選択することで手番 $t+2$ において $\bar{X}$ が空場で手番になるが $\mu_X[t+2] = \mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t+2]+1$ となり仮定より X 必勝。 $\bar{X}$ が出した札が上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れた札であった場合その度にマッチングしている札を出すことによって $M_X[t+2m+1]$ (m は正の整数) 巡において $\bar{X}$ はパスを選択するか上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札を出すかどちらかであるが $\bar{X}$ がパスを選択した場合は $\mu_X[t+2m+2] = \mu_X[t] - m > \mu_{\bar{X}}[t] - m = \mu_{\bar{X}}[t+2m+2]$ で空場で X の手番になるので仮定より (i) は成立。上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札を出した場合もそれにパスすることによって $\mu_X[t+2m+3] = \mu_X[t] - m = \mu_{\bar{X}}[t] - m = \mu_{\bar{X}}[t+2m+3]+1$

で $\bar{X}$ の手番となるので仮定より (i) は成立。

後者は、手番 t において X が上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れる札を出した場合そのマッチングしている札を手番 $t+1$ に出すことによってその札が相手にとってマッチングしていない (=出せない) 札であれば $\mu_X[t+2] = \mu_{\bar{X}}[t+2]$

で $\bar{X}$ の手番になるので $\bar{X}$ 必勝マッチングしている札であれば $\mu_X[t] - 1 = \mu_X[t+2] = \mu_{\bar{X}}[t+2] - 1$ で場に札がある状態なので、系 2 より $\bar{X}$ 必勝したがって上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れる札を出した場合 (ii) が成立. 上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れない札を出した場合パスを選択することによって手番 $t+1$ において手番はかわらず $\mu_{\bar{X}} = k+1$ の状態になるがこれは有限界しか起こらない. したがって (ii) は成立. 以上より、帰納法により任意の $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に対して (i), (ii) が成立する. $\square$

補題 6. ある巡開始時の手番 t における手番プレイヤーを X とする. このとき, (i) $\mu_X = \mu_{\bar{X}}$ 且つ $\nu_X, \nu_{\bar{X}} > 1$ ならば X 必勝 (ii) $\mu_X + 1 = \mu_{\bar{X}}$ 且つ $\nu_X, \nu_{\bar{X}} > 1$ ならば $\bar{X}$ 必勝

証明. $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に関する帰納法を用いて示す. まず, $\mu_X[t] \leq 1$ のとき, (i) が, $\mu_{\bar{X}}[t] \leq 2$ のとき, (ii) が成立することをしめす. ($\mu_{\bar{X}}[t] = 1$ のときは $\nu > 0$ となるので (ii) は成立しない.) 前者に関しては, $\mu_X[t] = 0$ のとき $\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$ であるとする, $\mu_{\bar{X}}[t] = 0$. したがって $\bar{X}$ はこれ以降 X の札に対して手札を出すことができないので X 必勝.

$\mu_X[t] = 1$ のとき $\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$ であるとする, $\mu_{\bar{X}}[t] = 1$. 且つ $\nu_X, \nu_{\bar{X}} > 0$ (手札が減る一方であることを考えると) $\bar{X}$ はこれ以降 X の札に対して一回だけ手札を出すことができるが, X は一番弱い札から出すことによってどのタイミングで $\bar{X}$ が札を出してもその後後手の手札の中には二枚以上先手の一番強い札よりも弱い札が存在する. したがって X 必勝である. 後者に関しては, $\mu_X[t] + 1 = \mu_{\bar{X}}[t]$ のとき, すなわち, $\mu_X[t] = 0, \mu_{\bar{X}}[t] = 1$ のとき, X の手札は 2 枚以上 $\bar{X}$ にマッチングされている手札を持つ. また $\bar{X}$ の手札のうち一枚も X がマッチングしている手がない. X はマッチングされているいずれかの手を出したときに $\bar{X}$ は大きいほうから札を出すことによって全ての手札を出し切ることができるので $\bar{X}$ 必勝.

次に, ある $k > 0$ が存在して, $\mu_X \leq k$ ならば (i) が, $\mu_{\bar{X}} \leq k$ ならば (ii) が成立するとする. このとき, $\mu_X = k+1$ のとき, (i) が成立することを, $\mu_{\bar{X}} = k+1$ のとき, (ii) が成立することを示す.

まず前者から示す. $\mu_X[t] = |X[t]| = k+1$ のとき, $\mu_X[t] = |X[t]|$ のときは補題 1 より X 必勝. したがって以下では手番 t で X が $w_X[t]$ より弱い札を保有しているときを考える. 手番 t において X は $\mu_X[t]+1$ 番目に強い札を出す. このとき, X のマッチング構造は変わらないため $\mu_X[t] = \mu_X[t+1]$ である. ここで $\bar{X}$ がパスを選択した場合パスを選択しなくなるか $\mu_X[t+h] = |X[t+h]|$ となるまでこの操作を繰り返す. $\mu_X[t+h] = |X[t+h]|$ となれば X 必勝なのでパスを選択しないケースを考えるがこのとき $\bar{X}$ が出した札が上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札であった場合パスを選択することで手番 $t+2$ において $\bar{X}$ が空場で

手番になるが $\mu_X[t+2] = \mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t+2] + 1$ となり仮定より X 必勝. $\bar{X}$ が出した札が上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れた札であった場合その度にマッチングしている札を出すことによって $M_X[t+2m+1]$ (m は正の整数) 巡において $\bar{X}$ はパスを選択するか上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札を出すかどちらかであるが $\bar{X}$ がパスを選択した場合は $\mu_X[t+2m+2] = \mu_X[t] - m > \mu_{\bar{X}}[t] - m = \mu_{\bar{X}}[t+2m+2]$ で空場で X の手番になるので仮定より (i) は成立. 上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札を出した場合もそれにパスすることによって $\mu_X[t+2m+3] = \mu_X[t] - m = \mu_{\bar{X}}[t] - m = \mu_{\bar{X}}[t+2m+3] + 1$

で $\bar{X}$ の手番となるので仮定より (i) は成立.

後者は, 手番 t において X が上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れる札を出した場合そのマッチングしている札を手番 $t+1$ に出すことによってその札が相手にとってマッチングしていない (=出せない) 札であれば $\mu_X[t+2] = \mu_{\bar{X}}[t+2]$ で $\bar{X}$ の手番になるので $\bar{X}$ 必勝マッチングしている札であれば $\mu_X[t] - 1 = \mu_X[t+2] = \mu_{\bar{X}}[t+2] - 1$ で場に札がある状態なので系 2 より $\bar{X}$ 必勝. したがって上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れる札を出した場合 (ii) が成立. 上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れない札を出した場合パスを選択することによって手番 $t+1$ において手番はかわらず $\mu_{\bar{X}} = k+1$ の状態になるがこれは有限界しか起こらない. したがって (ii) は成立. 以上より、帰納法により任意の $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に対して (i), (ii) が成立する. $\square$

補題 7. ある巡開始時の手番 t における手番プレイヤーを X とする. このとき, (i) $\mu_X[t] + 1 = \mu_{\bar{X}}[t]$ 且つ $\nu_X[t] > 0, \nu_{\bar{X}}[t] = 0$ ならば X 必勝 (ii) $\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$ 且つ $\nu_X[t] = 0, \nu_{\bar{X}}[t] > 0$ ならば $\bar{X}$ 必勝

証明. $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に関する帰納法を用いて示す. まず, $\mu_X[t] = 0$ のとき, (i) が, $\mu_{\bar{X}}[t] = 1$ のとき, (ii) が成立することをしめす. ($\mu_{\bar{X}}[t] = 0$ のときは $\nu_X > 0$ となるので (ii) は成立しない.) 前者に関しては, $\mu_X[t] = 0$ のとき $\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$ であるとする, $\mu_{\bar{X}}[t] = 1$. 且つ $\nu_X > 0, \nu_{\bar{X}} = 0$ すなわち, (手札が減る一方であることを考えると) $\bar{X}$ はこれ以降 X の一枚を除いて一回も手札を出すことができないため, X はその札つまり一番弱い札を最後に出すことによって必勝である. 後者に関しては, $\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$ のとき, すなわち, $\mu_X[t] = 1, \mu_{\bar{X}}[t] = 1$ のとき, X の手札は 2 枚以上 $\bar{X}$ にマッチングされている手札を持つ. また $\bar{X}$ の手札のうち一枚しかマッチングしている手がない. X はマッチングされているいずれかの手を出したときに $\bar{X}$ は大きいほうから札を出すことによって全ての手札を出し切ることができるので $\bar{X}$ 必勝.

次に, ある $k > 0$ が存在して, $\mu_X \leq k$ ならば (i) が, $\mu_{\bar{X}} \leq k$ ならば (ii) が成立するとする. このとき, $\mu_X = k+1$ のとき, (i) が成立することを, $\mu_{\bar{X}} = k+1$ のとき, (ii) が

成立することを示す。

まず前者から示す。 $\mu_X[t] = |X[t]| = k + 1$ のとき、 $\mu_X[t] = |X[t]|$ のときは補題 1 より X 必勝。したがって以下では手番 t で X が $w_X[t]$ より弱い札を保有しているときを考える。手番 t において X は $\mu_X[t] + 1$ 番目に強い札を出す。このとき、 X のマッチング構造は変わらないため $\mu_X[t] = \mu_X[t+1]$ である。ここで $\bar{X}$ がパスを選択した場合パスを選択しなくなるか $\mu_X[t+h] = |X[t+h]|$ となるまでこの操作を繰り返す。 $\mu_X[t+h] = |X[t+h]|$ となれば X 必勝なのでパスを選択しないケースを考えるがこのとき $\bar{X}$ が出した札が上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札であった場合パスを選択することで手番 $t+2$ において $\bar{X}$ が空場で手番になるが $\mu_X[t+2] = \mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t+2]$ となり仮定より X 必勝 $\bar{X}$ が出した札が上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れた札であった場合その度にマッチングしている札を出すことによって $M_X[t+2m+1]$ (m は正の整数) 巡において $\bar{X}$ はパスを選択するか上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札を出すかどちらかであるが $\bar{X}$ がパスを選択した場合は $\mu_X[t+2m+2] + 1 = \mu_X[t] - m + 1 = \mu_{\bar{X}}[t] - m = \mu_{\bar{X}}[t+2m+2]$ で空場で X の手番になるので仮定より (i) は成立。上詰めマッチング $M_X[t]$ に現れない札を出した場合もそれにパスすることによって $\mu_X[t+2m+3] + 1 = \mu_X[t] - m + 1 = \mu_{\bar{X}}[t] - m + 1 = \mu_{\bar{X}}[t+2m+3]$ で $\bar{X}$ の手番となるので仮定より (i) は成立。

後者は、手番 t において X が上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れる札を出した場合そのマッチングしている札を $t+1$ 巡に出すことによってその札が相手にとってマッチングしていない (=出せない) 札であれば $\mu_X[t+2] = \mu_{\bar{X}}[t+2]$ で $\bar{X}$ の手番になるので $\bar{X}$ 必勝マッチングしている札であれば $\mu_X[t] - 1 = \mu_X[t+2] = \mu_{\bar{X}}[t+2] - 1$ で場に札がある状態なので系 2 より $\bar{X}$ 必勝。したがって上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れる札を出した場合 (ii) が成立。上詰めマッチング $M_{\bar{X}}[t]$ に現れない札を出した場合パスを選択することによって手番 $t+1$ において手番はかわらず $\mu_{\bar{X}} = k + 1$ の状態になるがこれは有限界しか起こらない。したがって (ii) は成立。以上より、帰納法により任意の $\mu_X[t], \mu_{\bar{X}}[t]$ に対して (i), (ii) が成立する。 □

補題 4 から補題 7 を用いることによって定理 1 は直ちに示される。

4. まとめ

本研究では、二人単貧民の必勝プレイヤー判定とその必勝戦略導出を扱った。単貧民自体は大貧民解析のための足がかりとして定義された簡易版であり、また真の困難性は多人数版にあるが、そういった、より一般化した設定でのアルゴリズム設計に、本研究で提案したアルゴリズムがサブルーチンとして有効に機能することを期待している。

謝辞

東京大学の太田勝己氏から本研究に対する大変有益なコメントをいくつもいただいた。ここに謝意を表す。また、本研究は旭硝子財団、JSPS 科研費 JP26540005、MEXT 科研費 JP24106004、JP24220003 の助成を受けた。

参考文献

- [1] 西野順二: 単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察 (“An analysis on TANHINMIN game”), ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集, pp. 66 – 73, 2007.
- [2] 木谷裕紀, 小野廣隆: 単貧民における必勝戦略と必勝判定問題に関する考察, 火の国情報シンポジウム 2016 論文集, 3B-3, 2016.