アクセス制限付きバッファをもつ再整列問題の計算困難性

有木 正[1,a)]　朝廣 雄一[2,b)]　宮野 英次[1,c)]

概要：再整列問題とは，2 つの文字列 U，V および U の部分文字列を一時的に格納することができる k 個のバッファが入力として与えられたとき，バッファを利用することにより，U を V へと再整列することができるか否かを問う問題である．本稿では，各バッファへの挿入時のアクセス回数と各バッファからの抜去時のアクセス回数を制限したアクセス制限付きバッファをもつ再整列問題の NP 完全性を示す．

キーワード：再整列問題，再整列バッファ，挿入アクセス数制限，抜去アクセス数制限，計算複雑さ

Complexity of Reordering Problems with Bounded-Acceses Buffers

Tadashi Ariki[1,a)]　Yuichi Asahiro[2,b)]　Eiji Miyano[1,c)]

Abstract: Given two sequences U and V of alphabets, and k buffers which can temporally store subsequences of U, the reordering problem is to decide whether the sequence U can be reordered into the sequence V by using k buffers. In this paper, we consider the computational complexity of its variant, called the reordering problem with bounded-accesses buffers such that the numbers of insertion-accesses and deletion-accesses are bounded, and prove that the variant is NP-complete.

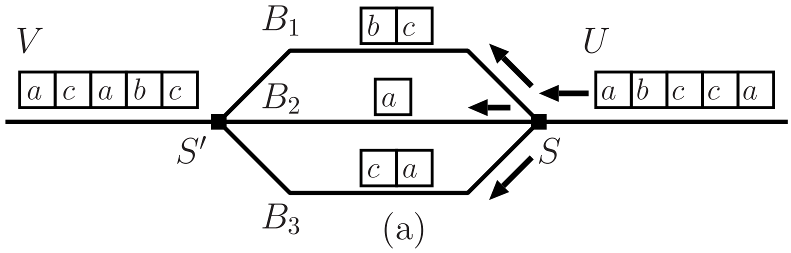
Keywords: Reordering problems, reordering buffers, bounded insertion-acceses, bounded deletion-accesses, computational complexity

1. はじめに

1.1 操車場における入換・組成

次のような操車場における列車の入換・組成を考える．図 1.1(a) のように右から 5 個の車両を持つ列車の列 $U = abcca$ が到着したとする．分岐器 S において，それぞれの車両は 3 本の仕分け線 B_1，B_2 または B_3 のいずれかに送られる．また，分岐器 S' において，仕分け線から車両が左へと送り出される．操車場で目的の列 $V = acabc$ へと再整列して，列車は左へと出発していく．(1) 図 1.1(a) では，分岐器 S を切り替えることにより，先頭車両 a を仕分け線 B_2 に入れ，次の bc を仕分け線 B_1 に入れ，最後に ca を B_3 に入れる．次に，分岐器 S' を切り替えることにより，仕分け線 B_2 の車両 a を送り出し，続いて B_3 の 2 個の車両 ca を送り出し，最後に B_1 の bc を送り出すことで，目的の列車列 $V = acabc$ を得ることができる．(2) 図 1.1(b) では，図 1.1(b) と同様に，$U = abccda$ が右から来るが，仕分け線が B_1 および B_2 の 2 本しか無い．分岐器 S において，B_2 に先頭車両 a，B_1 に次の 2 車両 bc，最後に，もう一度仕分け線 B_2 に 2 車両 ca を入れる．次に、S' において，B_2 にある 3 車両 aca を送り出し，その後，B_1 の bc を送り出すことにより，$V = acabc$ を得ている．ここで，図 1.1(a) の (1) の場合は，それぞれの連続した車両を入れるために分岐器 S を切り替える回数が，それぞれの仕分け線について高々 1 回であるが，3 本の仕分け線を必要としている．一方，図 1.1(b) の (2) の場合は，それぞれの連続した車両を入れるために分岐器 S を切り替える回数が，仕分け線 B_1 については 1 回のみであるが，仕分け線 B_2 については 2 回必要となっている．しかし，2 本の仕分け線のみで列車列 U を V に入れ替えることができる．また，(1) および

1 九州工業大学情報工学部 〒 802-8502 飯塚市川津 680-4
2 九州産業大学情報科学部 〒 813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1
a) ariki_t@theory.ces.kyutech.ac.jp
b) asahiro@is.kyusan-u.ac.jp
c) miyano@ces.kyutech.ac.jp



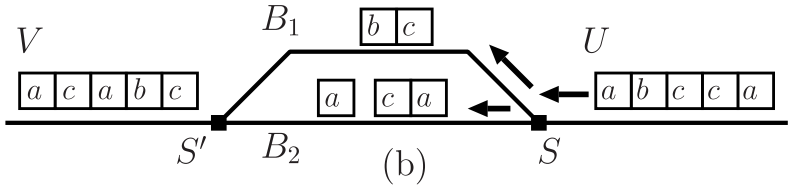


図 1 操車場における入換・組成

(2) の場合について，それぞれの連続した車両を取り出すために分岐器 S' を切り替える回数が，それぞれの仕分け線について高々 1 回であることに注意する．

1.2 バッファをもつ再整列問題

本稿では，上で述べた，操車場における列車の入換・組成を次のような文字列の再整列問題として定式化して，仕分け線の本数，分岐器のそれぞれの仕分け線への切り替え回数と定式化した文字列再整列問題の計算複雑さについて考える．入力として 2 つの文字列 U，V が与えられる．U の部分文字列を一時的に格納することができる複数のバッファに対して，適切な順序の格納と取出しを行うことで，U を V へと再整列する問題を考える．d 個の要素を持つアルファベット集合を $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d\}$ とする．すなわち，$|\Sigma| = d$ である．Σ のアルファベットからなる長さ n の 2 つの文字列を $U = u_1u_2\cdots u_n$，$V = v_1v_2\cdots v_n$ とする．ここで，$i = 1, 2, \cdots, n$ について $u_i, v_i \in \Sigma$ であり，V は U の置換文字列とする．文字列を一時的に格納できるバッファの容量制限は無い，もしくは長さ n の文字列をすべて格納できるとものとする．k 個のバッファを B_1，B_2，$\cdots$，B_k とする．本稿では，k 個の（容量制限の無い）バッファを用いることで U を V へ置換できるか否かを判定する**バッファをもつ再整列問題 RB**(k) を考える．

> **バッファをもつ再整列問題 RB**(k)
> **入力：** 2 つの長さ n の文字列 U，V および k 個のバッファ B_1，B_2，$\cdots$，B_k．
> **問題：** k 個のバッファを用いることで文字列 U を文字列 V に置換できるか否か？

操車場における入換・組成において，操車場に到着した列車列に文字列 U は相当し，操車場から出発する列車列に V が相当する．また，バッファは仕分け線を表している．

本稿では，さらに，操車場におけるそれぞれの仕分け線への分岐器の切り替え回数に相当して，各バッファへの挿入時のアクセス回数，抜去時のアクセス回数を考える．バッファ数 k，挿入時のアクセス回数 ℓ，抜去時のアクセス回数 m の 3 個組によりアクセス制限付きバッファをもつ再整列問題を定義する．ここで，アクセス数は，U において連続する文字列ブロックをバッファに挿入する操作を 1 回，または，バッファにある連続する文字列ブロックをバッファから抜去する操作を 1 回として数える．

> **アクセス制限付きバッファをもつ再整列問題 RB**$_{\ell,m}(k)$
> **入力：** 2 つの長さ n の文字列 U，V および k 個のバッファ B_1，B_2，$\cdots$，B_k．
> **条件：** それぞれのバッファ B_i について，挿入時に高々 ℓ 回，抜去時に高々 m 回のみアクセス可能．
> **問題：** アクセス数条件を満たした k 個のバッファを用いることで文字列 U を目標文字列 V に置換できるか否か？

挿入時のバッファへのアクセス回数に関して制限を考えない問題については，入力文字列の長さ n が最大アクセス数であるので，$\mathrm{RB}_{n,m}(k)$ とする．同様に，抜去時のアクセス回数を考えない場合は $\mathrm{RB}_{\ell,n}(k)$ とする．

図 1.1 では，それぞれの連続した車両を入れるために分岐器 S を切り替える回数が，それぞれの仕分け線について高々 1 回で，3 本の仕分け線があると列車列を $U = abcca$ から $V = acabc$ にできた．よって，入力として 2 つの入力列 U，V および $k = 3$ が与えられたとき，$\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題に対する答えは *yes* となる．また，同じ入力 U，V および $k = 2$ が与えられたとき，$\mathrm{RB}_{2,1}(k)$ 問題の答えは *yes* である．

1.3 本稿の結果

本稿では，バッファを用いた再整列問題の計算複雑さについて考える．まず，挿入時および抜去時のアクセス回数を，それぞれ高々 1 回に限定したとしても再整列問題が計算困難であること，すなわち，$\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題の NP 完全性を示す．さらに，任意の定数 ℓ，m について，$\mathrm{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題が NP 完全となることを示す．

1.4 関連研究

文献 [1], [2], [4] においても，操車場における列車列の再整列問題が考えられ，列車操車場問題（Train Marshalling problem）として知られている．列車操車場問題では，それぞれの仕分け線へ車両列を入れる際の分岐器の切り替え回数に制限を考えておらず，また，仕分け線から車両列を送り出す際には，仕分け線にあるすべての車両列を送り出す必要がある．すなわち，送り出す際の分岐器の切り替え数は高々 1 回に制限されており，$\mathrm{RB}_{n,1}(k)$ 問題と等価な問題である．文献 [4] において，Dahlhaus, P. Horak, M. Miller, J.F. Ryan は，列車操車場問題の NP 完全性を示しているため，$\mathrm{RB}_{n,1}(k)$ 問題は NP 完全となる．また，文献 [2] では，$\mathrm{RB}_{n,1}(k)$ 問題の固定パラメータ容易性が示されている．文献 [1] では，$\mathrm{RB}_{n,1}(k)$ におけるバッファ数の上界，およびオフライン問題としての形式化が議論されている．本稿で考えるアクセス制限付きバッファをもつ再整列問題は，列車操車場問題を特別な場合として含んだより一般的な問題となっている．仕分け線の切り替え回数，すわなち，バッファへのアクセス回数と計算困難性の関係を明らかにすることが本稿の目標である．なお，再整列問題は列車操車場問題を特別な問題として含んでいるが，$\ell < n$ について，$\mathrm{RB}_{n,1}(k)$ 問題の NP 完全性が $\mathrm{RB}_{\ell,m}(k)$ の NP 完全性を示していないこと，特に，$\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題は P になりうることに注意する．

2. $\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題の計算困難性

本節では，バッファへの挿入時の各バッファへのアクセス回数を $\ell = 1$，各バッファからの抜去時の各バッファへのアクセス回数を $m = 1$ とした問題，$\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題の計算困難性を示す．NP 困難性の証明は，文献 [6] で NP 完全性が示されている共通文字列分割問題（k-Common String Partition 問題，CSP(k) 問題）からの帰着を与えることにより示す．

CSP(k) 問題は，以下のような問題である [3], [5], [6]：文字列 A の分割 P_A とは文字列 A の部分文字列の集合 $P_A = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ である．すなわち，文字列の連接を $\circ$ とするとき，A_i は文字列 A の部分文字列を表し，$A = A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_k$ である．また, 単に，$A = A_1 A_2 \cdots A_k$ と表記することもある．k で分割数を表し，それぞれの部分文字列 A_i をブロックと呼ぶことにする．長さ n の文字列 A と分割数が k である A の分割 P_A，長さ n の文字列 B と分割数が k である B の分割 P_B が与えられた時，P_B が P_A の置換であるとき，(P_A, P_B) の組を A と B の共通分割と呼ぶ．CSP(k) 問題は以下のように定義される．

> **k-共通文字列分割問題（CSP(k) 問題）**
> **入力：** 2 つの長さ n の文字列 A，B および分割数 k
> **問題：** 2 つの文字列 A，B は分割数が k となる共通分割の組 (P_A, P_B) を持つか否か？

定理 1 $\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題は NP 完全である．

証明. 最初に，$\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題がクラス NP に属すことを示す．$\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題の入力は 2 つの文字列 U，V および整数 k であるので，入力インスタンスを (U, V, k) と表す．$\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題のインスタンス (U, V, k) に対して，k 個のバッファ内に挿入されたすべての部分文字列を証明書として選択する．検証アルゴリズムは，このすべての部分文字列を並び替えて文字列 U を形成することを確認する．文字列 V に対しても同様に行う．この証明書は簡単に多項式時間で検証できる．したがって，$\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題はクラス NP に属す．

次に, NP 完全である CSP(k) 問題は $\mathrm{RB}_{1,1}(k)$ 問題に多項式時間帰着可能であることを示す．入力として CSP(k) 問題のインスタンス (U, V, k) を受け取り，出力として $\mathrm{RB}_{1,1}(k')$ 問題のインスタンス (U', V', k') を構成する，次のような多項式時間帰着アルゴリズムを設計する．帰着アルゴリズムは，CSP(k) 問題で与えられた文字列 U，V を，そのまま $\mathrm{RB}_{1,1}(k')$ 問題の文字列 U'，V' とする．帰着アルゴリズムは，さらに，CSP(k) 問題で与えられたブロック数 k を，同様に $\mathrm{RB}_{1,1}(k')$ 問題のバッファ数 k' とする．

最後に，この変換が実際に帰着可能であることを示す．すなわち，k 個のブロックをもつ文字列 U と文字列 V の分割の組 (P_U, P_V) が共通分割であることと，挿入時アクセス回数および抜去時アクセス回数が高々 1 回ずつである k' 個のバッファを用いて，文字列 U' を文字列 V' に再整列することが同値であることを示す．

k 個のブロックをもつ文字列 U と文字列 V の分割の組 (P_U, P_V) が共通分割であると仮定する．このとき，k' 個のバッファを用いて，文字列 U' を文字列 V' に再整列できることを示す．U と V は k 個のブロックをもつので，U のすべてのブロックをそれぞれ独立したバッファに挿入すると，バッファの数は k 個になる．仮定より組 (P_U, P_V) は共通分割であるので，バッファに挿入されているすべての部分文字列を適切に抜去すると，U' を V' に再整列することができる．

逆に，k' 個のバッファを用いて，U' を V' に再整列することができると仮定する．このとき，k 個のブロックをも

つ文字列 U と文字列 V の分割の組 (P_U, P_V) が共通分割であるということを示す．k' 個のバッファに挿入されたすべての部分文字列をそれぞれブロックとすると，ブロックの数は k' 個となる．仮定より U' は V' に再整列することができるので，$P_U = P_V$ である．すなわち，組 (P_U, P_V) が共通分割となる．

以上より，$\mathsf{RB}_{1,1}(k)$ 問題はクラス NP に属し，かつ，NP 完全である $\mathsf{CSP}(k)$ 問題は $\mathsf{RB}_{1,1}(k)$ 問題に多項式時間帰着可能であるので，$\mathsf{RB}_{1,1}(k)$ 問題は NP 完全である． ■

3. $\mathrm{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題の計算困難性

本節では，より一般の場合，すなわち，バッファへの挿入時の各バッファへのアクセス回数を高々 ℓ，各バッファからの抜去時の各バッファへのアクセス回数を高々 m とした問題，$\mathsf{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題の計算困難性を示す．

定理 2 任意の 2 つの定数 $1 \le \ell, m \le n$ について，$\mathsf{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題は NP 完全である．

証明. $\mathsf{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題がクラス NP に属すことは自明であり省略する．$\mathsf{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題の NP 困難性は $\mathsf{RB}_{1,1}(k^0)$ 問題から多項式時間帰着可能であることにより示す．以下では，まず，(i) $\ell \ge m \ge 1$ の場合について述べ，次に，(ii) $1 \le \ell < m$ の場合について述べる．

(i) まず $\ell \ge m \ge 1$ とする．$\mathsf{RB}_{1,1}(k^0)$ 問題のインスタンス (U^0, V^0, k^0) が与えられたとき，$\mathsf{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題のインスタンス (U, V, k) を構成する．まず，長さ n の 2 つの文字列 U^0，V^0 は以下で表されるとする．

$$\begin{aligned} U^0 &= u_1^0 u_2^0 \cdots u_n^0 \\ V^0 &= v_1^0 v_2^0 \cdots v_n^0. \end{aligned}$$

このとき，U^0 に対応して ℓ 個の文字列 U^1，U^2，$\cdots$，U^ℓ，V^0 に対応して ℓ 個の文字列 V^1，V^2，$\cdots$，V^ℓ を準備する．

$$\begin{aligned} U^1 &= u_1^1 u_2^1 \cdots u_n^1 \\ U^2 &= u_1^2 u_2^2 \cdots u_n^2 \\ &\vdots \\ U^\ell &= u_1^\ell u_2^\ell \cdots u_n^\ell \\ V^1 &= v_1^1 v_2^1 \cdots v_n^1 \\ V^2 &= u_1^2 v_2^2 \cdots v_n^2 \\ &\vdots \\ V^\ell &= u_1^\ell v_2^\ell \cdots v_n^\ell. \end{aligned}$$

ここで，$i \ne j$ について，U^i に含まれる文字と U^j に含まれる文字はすべて異なり，すべての $1 \le i \le n$ について U^i は V^i の置換列になっている．例えば，$\mathsf{RB}_{1,1}(k^0)$ 問題について，

$$\begin{aligned} U^0 &= a^0 b^0 c^0 a^0 \\ V^0 &= c^0 a^0 b^0 a^0 \end{aligned}$$

であった場合には，U^i，V^i として以下の文字列を考える．

$$\begin{aligned} U^i &= a^i b^i c^i a^i \\ V^i &= c^i a^i b^i a^i. \end{aligned}$$

また，上記の文字列には含まれない文字からなる長さ k^0 の文字列 $A^{i,j}$（$1 \le i \le \ell$，$1 \le j \le m-1$）を考える．

$$A^{i,j} = a_1^{i,j} a_2^{i,j} \cdots a_{k^0}^{i,j}.$$

文字列 $A^{i,j}$ に含まれる文字列を逆順にした文字列を $\overline{A^{i,j}}$ とする．

$$\overline{A^{i,j}} = a_{k^0}^{i,j} a_{k^0-1}^{i,j} \cdots a_1^{i,j}.$$

これらの文字列を連接した以下の文字列を考える．

$$\begin{aligned} A^i &= A^{i,1} A^{i,2} \cdots A^{i,m-1} \\ \overline{A^j} &= \overline{A^{1,j}}\ \overline{A^{2,j}} \cdots \overline{A^{\ell,j}}. \end{aligned}$$

ここで，例えば，$\overline{A^1}$ は，A^1 の先頭部分文字列の逆列 $\overline{A^{1,1}}$，A^2 の先頭 $\overline{A^{2,1}}$，A^3 の先頭 $\overline{A^{3,1}}$ などを連接した文字列であることに注意する．さらに，上記の文字列には含まれない ℓ 個の文字

$$d_1, d_2, \cdots, d_\ell$$

を準備する．以上の文字列により，$\mathsf{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題のインスタンス (U, V, k) を以下のように構成する．

$$\begin{aligned} U &= U^1 A^1 d_1 U^2 A^2 d_2 \cdots U^\ell A^\ell d_\ell \\ V &= d_1 d_2 \cdots d_{\ell-(m-1)} \circ \\ &\quad V^1 d_{\ell-(m-2)} V^2 d_{\ell-(m-3)} \cdots V^{m-2} d_\ell \circ \\ &\quad V^{m-1} V^m \cdots V^\ell\ \overline{A^1}\ \overline{A^2} \cdots \overline{A^\ell} \\ k &= \ell \times k^0 + 1 \end{aligned}$$

以上で帰着は終わりである．上記の帰着は多項式時間で実行可能である．

次に，$\mathsf{RB}_{1,1}(k^0)$ 問題のインスタンス (U^0, V^0, k^0) に対する答えが *yes* のとき，かつその時に限り，$\mathsf{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題のインスタンス (U, V, k) に対する答えが *yes* となることを示す．

(i-1) (U^0, V^0, k^0) に対する答えが *yes* と仮定する．すなわち，文字列 U^0 は k^0 個のバッファを用い，それぞれのバッファへの挿入回数を 1 回，抜去回数を 1 回に限定した場合でも，文字列 V^0 に置換可能である．同様に，すべての $1 \le i \le \ell$ について，U^i は k^0 個のバッファを用いることで V^i に置換可能である．また，$A^{i,j}$ は k^0 個のバッファに $a_1^{i,j}$ から $a_{k^0}^{i,j}$ の文字をそれぞれ 1 個ずつ挿入して，まず $a_{k^0}^{i,j}$，次に $a_{k^0-1}^{i,j}$ のように取り出すことで，逆列 $\overline{A^{i,j}}$ を得

る．よって，最初の k^0 個のバッファを用いて，U^1 の置換列 V^1，$A^{1,1}$ の置換列 $\overline{A^{1,1}}$，$A^{1,2}$ の置換列 $\overline{A^{1,2}}$，$\cdots$，$A^{1,m-1}$ の置換列 $\overline{A^{1,m-1}}$ という挿入・抜去をそれぞれ m 回繰り返すことにより，文字列 $A^{i,j}$ を置換して $\overline{A^{i,j}}$ を得ることができる．また，次の k^0 個のバッファを用いて U^2，$A^{2,1}$，$A^{2,2}$，$\cdots$，$A^{2,m-1}$ を置換して，それぞれ V^2，$\overline{A^{2,1}}$，$\overline{A^{2,2}}$，$\cdots$，$\overline{A^{2,m-1}}$ を得る，同様に，すべての U^i，$A^{i,j}$ を置換することで V^i，$\overline{A^{i,j}}$ を得ることができる．ここで，挿入回数および抜去回数はそれぞれ高々 m 回で十分である．ここまでで $\ell \times k^0$ 個のバッファを用いており，$k = \ell \times k^0 + 1$ であることから，さらに 1 個のバッファを用いることができる．このバッファには，d_1，d_2，$\cdots$，d_ℓ の ℓ 個の文字を挿入する．U においてそれぞれの文字は離れているが，挿入時に ℓ 回のアクセスでひとつのバッファに挿入することができる．抜去時は，

$$d_1 d_2 \cdots d_{\ell-(m-1)},\ d_{\ell-(m-2)},\ d_{\ell-(m-3)},\ \cdots,\ d_\ell$$

の m 個の文字列に分割する．すなわち，m 回のアクセスで抜去する．抜去は，$d_1 d_2 \cdots d_{\ell-(m-1)}$ に続いて，V^1，$d_{\ell-(m-2)}$，V^2，$d_{\ell-(m-3)}$，$\cdots$，V^{m-2}，d_ℓ の順序で行う．その後，V^{m-1}，V^m，$\cdots$，V^ℓ を取り出す．最後に，$\overline{A^1} = \overline{A^{1,1}}\ \overline{A^{2,1}} \cdots \overline{A^{\ell,1}}$，次に $\overline{A^2}$，$\cdots$，$\overline{A^\ell}$ を取り出す．以上より，(U, V, k) に対する答えが yes となる．

(i-2) (U^0, V^0, k^0) に対する答えが no と仮定する．このとき，(U, V, k) に対する答えが yes と仮定して矛盾を導く．ここで，次の文字列に対する操作を観察する．

$$\begin{aligned}
A^1 &= A^{1,1} \circ A^{1,2} = a_1^{1,1} a_2^{1,1} a_3^{1,1} \circ a_1^{1,2} a_2^{1,2} a_3^{1,2} \\
A^2 &= A^{2,1} \circ A^{2,2} = a_1^{2,1} a_2^{2,1} a_3^{2,1} \circ a_1^{2,2} a_2^{2,2} a_3^{2,2} \\
\overline{A^1} &= \overline{A^{1,1}} \circ \overline{A^{2,1}} = a_3^{1,1} a_2^{1,1} a_1^{1,1} \circ a_3^{2,1} a_2^{2,1} a_1^{2,1} \\
\overline{A^2} &= \overline{A^{1,2}} \circ \overline{A^{2,2}} = a_3^{1,2} a_2^{1,2} a_1^{1,2} \circ a_3^{2,2} a_2^{2,2} a_1^{2,2}
\end{aligned}$$

まず，$A^{1,1} = a_1^{1,1} a_2^{1,1} a_3^{1,1}$ の逆順 $\overline{A^{1,1}} = a_3^{1,1} a_2^{1,1} a_1^{1,1}$ を得るためには 3 個のバッファが必要である．もし 2 個しか利用できない場合，$a_1^{1,1} a_2^{1,1}$ または $a_2^{1,1} a_3^{1,1}$ が同じバッファに挿入されるため，$\overline{A^{1,1}}$ の部分文字列 $a_2^{1,1} a_1^{1,1}$ または $a_3^{1,1} a_2^{1,1}$ を得ることができない．1 個のバッファに 2 回挿入するときや 2 個のバッファに 1 回ずつ挿入するとき「2 個のスペースが必要」と言う事にすると，A^1 および A^2 から $\overline{A^1}$ および $\overline{A^2}$ を得るためには 12 個のスペースが必要である．文字列 U は $(m-1) \times \ell$ 個の長さ k^0 の部分文字列 $A^{i,j}$ を持っており，それぞれを $\overline{A^{i,j}}$ に置換するために，$(m-1) \times \ell \times k^0$ 個のスペースが必要になる．各バッファの抜去アクセス数は高々 m 回であるので，$m \times (\ell \times k^0 + 1)$ 個のスペースがあるので，残りのスペースは $\ell \times k^0 + m$ である．d_1 から d_ℓ については，m 個の部分文字列に分割されるので m 個のスペースを必要とする．さらに，U は U^1 から U^ℓ の部分文字列を含む．ここまでで残りのは $k^0 \times \ell$ 個のスペースである．(U^0, V^0, k^0) に対する答えが no であるという仮定より，k^0 個のバッファで置換列 V^0 を得ることができないため，k^0 より多くのバッファを用いることで V^0 を得ることを考える．V^0 を得るために U^0 の部分文字列を挿入したバッファの数を k'，$k' > k^0$，とする．このとき，すべての $1 \leq i \leq \ell$ について，$k^0 \times \ell - k'$ 個のスペースを用いて，U^i を置換列 V^i を得ることができることになる．このことは，k^0 よりも少ないバッファを用いることにより，少なくとも 1 つの $U^{i'}$ から $V^{i'}$ を得ることができることを意味している．しかし，$U^{i'}$ および $V^{i'}$ は，本質的には，U^0 および V^0 と同じ文字列であり，(U^0, V^0, k^0) に対する答えが no という仮定に矛盾する．よって，U より V を得ることが出来ないため，(U, V, k) に対する答えが no となる．

(ii) 次に $1 \leq \ell < m$ とする．このとき，上で定義された部分文字列により，$\mathsf{RB}_{\ell,m}(k)$ 問題のインスタンス (U, V, k) を以下のように構成する．

$$\begin{aligned}
U &= d_1 d_2 \cdots d_{m-(\ell-1)} \circ \\
&\quad U^1 d_{m-(\ell-2)} U^2 d_{m-(\ell-3)} \cdots U^{\ell-2} d_m \circ \\
&\quad U^{\ell-1} U^\ell \cdots U^m A^1 A^2 \cdots A^m \\
V &= V^1 \overline{A^1} d_1 V^2 \overline{A^2} d_2 \cdots V^m \overline{A^m} d_m \\
k &= m \times k^0 + 1
\end{aligned}$$

本帰着の正しさは，上と同様の議論で証明できる．詳細は省略する．■

謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金 JP25440018 および JP26330017 による．

参考文献

[1] K. Beygang, F. Dahms, S.O. Krumake, "Train Marshalling Problem - Algorithms and Bounds," Technische Universität Kaiserslautern (2010)

[2] L. Brueggeman, M. Fellows, R. Fleischer, M. Lackner, C. Komusiewicz, Y. Koutis, A. Pfandler, F. Rosamond, "Train Marshalling is Fixed Parameter Tradtable," *Discreate Applied Mathmatics*, Vol.136, pp.217–226 (2004)

[3] L. Bulteau, C. Komusiewicz, "Common String Partition Parametarized by Partition Size Is Fixed-Parameter Tractable," In *SODA*, pp.102–121 (2014).

[4] E. Dahlhaus, P. Horak, M. Miller, J.F. Ryan, "The Train Marshalling Problem," *Discreate Applied Mathmatics*, Vol.103 (1-3), pp.41–54 (2000).

[5] P. Damaschke, "Minimum Common String Partition Parameterized," In *WABI*, LNCS 5251, pp.87–98 (2008).

[6] A. Goldstein, P. Kolman, J. Zheng, "Minimum Common String Partition Proglem: Hardness and Approximations", The Electronic Journal of Combinatorics 12 (2005).