外平面グラフに対する Kollerの $L(2,1)$-ラベリングアルゴリズムの計算量解析

山中 寿登[1,a)]　小野 廣隆[2,b)]

概要：与えられたグラフの任意の頂点 u, v に対して, u と v が隣接するとき $|\ell(u) - \ell(v)| \geq 2$ を, u と v の距離が 2 のとき $\ell(u) \neq \ell(v)$ を満たすような, 頂点への非負整数の割り当て ℓ を $L(2,1)$-ラベリングという. $L(2,1)$-ラベリング問題は割り当て ℓ のラベル値の範囲 (つまり $\max(\ell(u)) - \min(\ell(v)) + 1$) を最小化するものである. 本研究では, n 頂点の外平面グラフに対する Koller の $O(n^{408})$-時間アルゴリズムを整理, 再構築, 緻密な計算量の解析を行い, その計算量を $O(n^{9+\varepsilon}\Delta^{15}\log n)$ まで削減できることを示す (ただし Δ, ε はそれぞれグラフの最大次数と微小な正定数). 一般に $\Delta = O(n)$ であるため, これは $O(n^{24+\varepsilon}\log n)$ である. さらに, $\Delta = \Omega(\sqrt{n})$ の外平面グラフに対する線形時間アルゴリズムを提案し, これら 2 つのアルゴリズムを組み合わせることにより $O(n^{16.5+\varepsilon}\log n)$-時間で外平面グラフの最適な $L(2,1)$-ラベリングが求まることを示す.

キーワード：グラフラベリング, 外平面グラフ, グラフアルゴリズム

Time Complexity Analysis of Koller's $L(2,1)$-labeling Algorithm for Outerplanar Graphs

Yamanaka Hisato[1,a)]　Ono Hirotaka[2,b)]

Abstract: Given a graph, an $L(2,1)$-labeling of the graph is an assignment ℓ from the vertex set to the set of nonnegative integers such that for any pair of vertices (u, v), $|\ell(u) - \ell(v)| \geq 2$ if u and v are adjacent, and $\ell(u) \neq \ell(v)$ if u and v are at distance 2.The $L(2,1)$-labeling problem is to minimize the span of ℓ (i.e.,$\max(\ell(u)) - \min(\ell(v)) + 1$). In this paper, we investigate Koller's $O(n^{408})$-time algorithm for an outerplanar graph with n vertices, and show that the time complexity can be reduced to $O(n^{9+\varepsilon}\Delta^{15}\log n)$, where Δ is the maximum degree of the graph and ε is an arbitrary constant. It is in general $O(n^{24+\varepsilon}\log n)$ since $\Delta = O(n)$. We then design a linear time algorithm for outerplanar graph with $\Delta = \Omega(\sqrt{n})$. By combining these algorithms, we show that $L(2,1)$-labeling problem for outerplanar graphs can be solved in $O(n^{16.5+\varepsilon}\log n)$ time.

Keywords: graph labeling, $L(2,1)$-labeling, outerplanar graph, graph algorithm

1. はじめに

与えられたグラフの頂点への非負整数の割り当てをラベリングという. 特に, 任意の頂点 u, v に対して, u と v が隣接するとき $|\ell(u) - \ell(v)| \geq 2$ を, u と v の距離が 2 のとき $\ell(u) \neq \ell(v)$ を満たすような, 頂点への非負整数の割り当て ℓ を $L(2,1)$-ラベリングという. 本研究で扱う $L(2,1)$-ラベリング問題とは, 割り当て ℓ のラベル値の範囲 (つまり $\max(\ell(u)) - \min(\ell(v)) + 1$) を最小化するものである.

この問題の背景として無線の周波数割り当て問題がある. 無線の基地局 A, B, C があったとして, A と B, B と C はそれぞれ交信しているとする. また, A と C は直接的な交信はないとする. このような場合, A と B, B と C は交信す

[1] 九州大学経済学部
[2] 九州大学大学院経済学研究院
[a)] 1EC13247N@s.kyushu-u.ac.jp
[b)] hirotaka@econ.kyushu-u.ac.jp

るために十分離れた周波数を使用しなければならないが, B における混信を避けるため, 直接交信しない A と C も異なる周波数を使用する必要がある. 基地局を頂点とみなし, 直接交信している基地局間に辺を結ぶことで, このような状況をグラフとしてモデル化することができる. 直接交信している場合を (直接辺で結ばれていることを意味する) 距離 1, 直接的な交信はないが, 一つの基地局のみを介して交信する場合を (辺を 2 本たどることで結ばれていることを意味する) 距離 2 とみなすことで, 無線の周波数割り当て問題を $L(2,1)$-ラベリング問題として定式化することができる.

この問題は一般には NP 困難であり [4], 対象とするグラフを次数 3 の平面グラフに限定したとしても NP 困難である [2]. さらに直並列グラフに限定しても NP 困難である [3] が, 木グラフに対しては線形時間アルゴリズムが知られている [5].

本研究では, 直並列グラフと木の中間に位置するグラフクラスである外平面グラフに注目する. 外平面グラフに対しては既に Koller により多項式時間で最適なラベリングが発見できることが示されている [7]. しかし, そのアルゴリズムの計算量は $O(n^{408})$ と極めて高次の多項式となっており*1, 実用的ではない.

本研究では, 外平面グラフに対する Koller のアルゴリズムを整理, 再構築, 緻密な計算量の解析を行い, その計算量が $O(n^{9+\varepsilon}\Delta^{15}\log n)$ であることを示す (ただし Δ, ε はそれぞれグラフの最大次数と微小な正定数). 一般に $\Delta = O(n)$ であるため, これは $O(n^{24+\varepsilon}\log n)$ である. さらに, $\Delta = \Omega(\sqrt{n})$ の外平面グラフに対する線形時間アルゴリズムを提案し, これら 2 つのアルゴリズムを組み合わせることにより $O(n^{16.5+\varepsilon}\log n)$-時間アルゴリズムを与える.

2. 準備

2.1 グラフラベリング

グラフラベリングについて次のように定義する.

定義 1. グラフ $G = (V, E)$ の $L(2,1)$-ラベリングとは関数 $\ell : V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ で以下を満たすもののことを言う：任意の頂点 u, v に対して, u と v が隣接するとき $|\ell(u) - \ell(v)| \geq 2$, u と v が共通の隣接する頂点を持つとき $\ell(u) \neq \ell(v)$. また, この条件のことを $L(2,1)$ 制約と呼ぶ.

最適なラベリングとは, ラベル値の範囲を最小にするラベリングであり, その最小値を σ で表す. 以下で考えるラベリングは最適なラベリングを意味する.

次の命題は任意のグラフに対する σ の下限を与える. ここで, $d(v) = \Delta$ となる頂点 v を MV(主要頂点) と定義し, MV でない頂点を NMV(非主要頂点) と定義する. $N[x]$ は頂点 x に隣接する頂点及び x を表わす頂点集合である.

*1 Koller 自身はその計算量を $O(n^{1001})$ と見積もっている

命題 1. 任意のグラフに対して, $\sigma \geq \Delta + 2$ が成り立つ.

証明. $W_\Delta = (V, E)$ を $V = \{v_0, \ldots, v_\Delta\}$ と $E = \{v_0 v_k | 1 \leq k \leq \Delta\}$ で表されるグラフと定義する. $L(2,1)$ 制約により, 各 v_k には $\ell(v_0)$ と 2 以上離れたラベルを割り当てなければならず, また v_k は v_0 を経由して $v_m (1 \leq m \leq \Delta, k \neq m)$ と距離が 2 なので $\ell(v_k) \neq \ell(v_m)$. $\ell(v_0) = 0$ としても $\ell(v_k) \geq 2$ であり, $\ell(v_k) \neq \ell(v_m)$ により, W_Δ にラベリングするには少なくとも $\Delta + 2$ 個のラベルが必要となる. □

命題 2. $\sigma = \Delta + 2$ のとき, MV に割り当てられるラベルは 0 または $\Delta + 1$ である.

証明. $\ell(v_0) = p (1 \leq p \leq \Delta)$ とすると $\ell(v_k)$ に $p{-}1, p, p{+}1$ が割り当てられず, $|\{0, 1, \ldots, p{-}2, p{+}2, \ldots, \Delta{+}1\}| = \Delta{-}1$ となり, Δ 個ある v_k への $\sigma = \Delta + 2$ でのラベリングは不可能となるので $\sigma = \Delta + 2$ のとき, MV に割り当てられるラベルは 0 または $\Delta + 1$ となる. □

命題 3. $\sigma = \Delta + 2$ のとき, グラフの任意の頂点 x の $N[x]$ は高々 2 個しか MV を含まない.

証明. $N[x]$ に MV が 3 個以上含まれるとき MV に対し 0 や $\Delta{+}1$ 以外のラベルを割り当てなければならず, $\sigma = \Delta{+}2$ でのラベリングは不可能となるので $\sigma = \Delta + 2$ のとき, そのグラフの任意の頂点 x の $N[x]$ は高々 2 個しか MV を含まない. □

2.2 外平面グラフ

外平面グラフとは, すべての頂点が外面に面しており, 辺は交差しない平面描画を持つグラフである. また, 外平面グラフは K_4 と $K_{3,2}$ をマイナーとして含まない.

準備として Calamoneri により提案された外平面列と OBFS 木を定義する [1].

まず, もとの外平面グラフに辺 $v_i v_{i+1}$ (ただし $v_{n+1} = v_1$) を追加してもそのグラフが外平面グラフを維持するような頂点配列を外平面列と定義する.

ここで, G を $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ をその外平面列とする外平面グラフとする. v_1 を根として幅優先探索によって外平面グラフを木のような形に表したものを OBFS (Ordered Breadth First Search) 木と定義する.

OBSF 木の根 v_1 のレベルを 0 とし, v_1 の子のレベルを 1 とする. これを再帰的に行うことで OBFS 木のレベルを定義する. また, それぞれのレベルにおいて左から右への配列に従って, 節点の番号付けを行う. つまり $v_{\ell,k}$ はレベル ℓ の k 番目の節点であることを意味する. 図 1 に外平面グラフの例を, 図 2 にその OBFS 木を, 図 3 にそれに対する節点への番号付けを表わす.

ここで, OBFS 木において, $v_{\ell-1,k}$ をある節点とし, その子を $v_{\ell,i}, \ldots, v_{\ell,j}$ とする. 今, $v_{\ell-1,k}$ は根でないならば

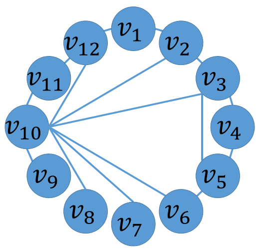

図 1　外平面グラフの例

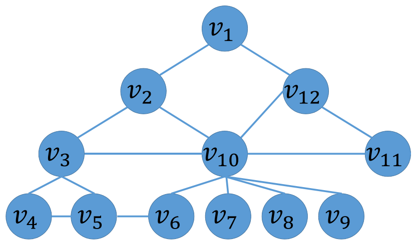

図 2　図 1 の OBFS 木

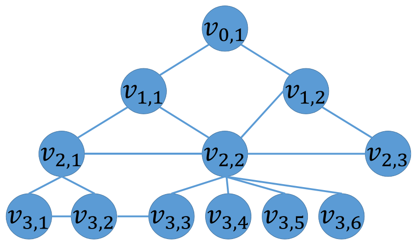

図 3　図 2 に対する番号付け

親である $v_{\ell-2,s}$ とつながっており，G において，$v_{\ell-1,k}$ は $v_{\ell,i-1}, v_{\ell-1,k-1}, v_{\ell-1,k+1}, v_{\ell-2,s+1}$ とはつながっている可能性がある．

次の定理は外平面グラフに対する σ の上限を与える．

定理 1. ([7]) $\Delta \geq 3$ の外平面グラフにおいて，一般に $\sigma \leq \Delta + 8$ が，$\Delta \geq 10$ の場合は $\sigma \leq \Delta + 3$ が成り立つ．

証明については [7] を参照されたい．この定理は以下の命題を与える．

命題 4. $\Delta \geq 3$ の外平面グラフにおいて，一般に $\sigma = \Delta + 8$ で，$\Delta \geq 9$ の場合は，$\sigma = \Delta + 3$ でラベリングする，貪欲アルゴリズムが存在する．

命題 1 で示したように σ の下限は $\Delta + 2$ である．また Δ が定数の場合，外平面グラフの最適な $L(2,1)$-ラベリングを線形時間で求めることができる．以下では主に $\sigma = \Delta + 2$ でのラベリング可能性の判定について考える．

3. Koller のアルゴリズム

Koller のアルゴリズムは A アルゴリズムと B アルゴリズムからなっている．これらのアルゴリズムは共に全列挙型のアルゴリズムである．B アルゴリズムは A アルゴリズムに比べると計算効率は良いが，$\Delta \geq 1000$ かつ $\frac{\ln n}{\ln \Delta} < 0.01\Delta$ を満たすグラフに対してのみ適用することができ，その計算量は $O(n^{36})$ である．B アルゴリズムが適用できない場合，A アルゴリズムを適用することになり，その計算量は $O(n\Delta^{4\Delta+7})$ である．これらのアルゴリズムは共に分割統治法に基づいており，下記のステップを再帰的に繰り返す．その説明のため以下の 3 つを定義する．

- $G_1 = \{v_2, v_3, \ldots, v_i\}$($v_i$ はグラフ G 上のある頂点)
- $G_2 = \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1\}$
- $N_{G_x}[v]$: グラフ G_x における頂点 v とそれに隣接する頂点を表わす頂点集合

3.1 A アルゴリズム

A アルゴリズムを以下で定義する．

Step 1. 外平面グラフ G を G_1 と G_2 に分割する．

Step 2. $N_{G_1}[v_2, v_i]$ と $N_{G_2}[v_1, v_i]$ に $\{0, 1, \ldots, \Delta + 1\}$ からラベルを割り当てる．

Step 3. $L(2,1)$ 制約を満たしているかを確認するために G_1 と G_2 のラベリングされた頂点を見比べる．

ここで，$|N_{G_1}[v_2, v_i]|, |N_{G_2}[v_1, v_i]| \leq 2\Delta + 2$, $\sigma \leq \Delta + 2$ に注意すると，頂点数 n，最大次数 Δ のグラフに対する A アルゴリズムの計算量 $F(n, \Delta)$ は，以下のように見積もることができる．

$$
\begin{aligned}
F(n,\Delta) &= O(n \cdot (\sigma^{2\Delta+2})^2 \cdot (2\Delta+2)^2) \\
&= O(n \cdot (\Delta+2)^{4\Delta+4} \cdot (2\Delta+2)^2) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Koller は [7] で式 (1) を $O(n\Delta^{10\Delta})$ と評価している．A アルゴリズムは $\Delta \leq 1000$ または $\frac{\ln n}{\ln \Delta} \geq 0.01\Delta$ のときに実行される．前者の場合，その計算量は線形であるが，後者の場合，$n \geq \Delta^{0.01\Delta}$ から $O(n\Delta^{10\Delta}) = O(n^{1001})$ としている．

しかし，そもそも式 (1) を $O(n\Delta^{10\Delta})$ と見積もるのは過剰であり，二項定理を用いることで $O(n\Delta^{4\Delta+7})$ と評価できる．この評価を用いると，上記条件下での A アルゴリズムの計算量は $O(n^{408})$ となる．

3.2 B アルゴリズム

B アルゴリズムは，基本的には A アルゴリズムと同じスキームで動くが，Step 2 において，n, Δ により定義されるパラメータ k によって使用するラベル値を制限する点と，仮想的にワイルドカードとして機能するラベル h を用いる点が異なる．アルゴリズム B の Step 2 は以下のように定義される．

Step 2. $N_{G_1}[v_2]$ と $N_{G_2}[v_1]$ に $\{0, 1, \ldots, k-1\} \cup \{\Delta + 2 - k, \Delta + 3 - k, \ldots, \Delta + 1\} \cup \{h\}$ からラベルを割り当てる．ただし，$k = \lceil \frac{2 \ln n}{\ln 0.1\Delta} + 2 \rceil$.

ここで，仮想ラベル h は，それぞれ実態的には $\{k, k+1, \ldots, \Delta + 1 - k\}$ のうちのいずれかの値をとるラベルであり，それを考慮した実行可能性は保証するものとする (詳しくは [7] を参照されたい)．このようなラベリングを H-ラベリングと呼ぶ．つまり，B アルゴリズムは $L(2,1)$-ラベリングを求めるアルゴリズムではなく，H-ラベリングを求めるアルゴリズムとなっている．Koller は以下の定理を示した．

補題 1. ([7]) $\Delta \geq 1000$, $\frac{\ln n}{\ln \Delta} < 0.01\Delta$ を満たすグラフにおいて，H-ラベリングが存在するとき，かつそのときに限り，

$\sigma = \Delta + 2$ の $L(2,1)$-ラベリングが存在する.

A アルゴリズムのと同様の解析により, B アルゴリズムの計算時間 $F(n,\Delta)$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} F(n,\Delta) &= O(n \cdot ((\Delta+2)^{2k})^2 \cdot (2\Delta+2)^2 \cdot \Delta) \\ &= O(n \cdot \Delta^3 \cdot (\Delta+2)^{4k}) \end{aligned}$$

Koller はこれを k については $k \le \frac{4\ln n}{\ln\Delta}$, また $(\Delta{+}2)^{2k} \le (\Delta^2)^{8\ln n/\ln\Delta} = \Delta^{\ln n^{16}/\ln\Delta} = n^{16}$ として, その計算量を $O(n^{36})$ としている.

4. アルゴリズムの改善及び拡張

4.1 A アルゴリズムの改善

A アルゴリズムの Step 2 を以下のように調整することにより, その計算量を削減することができる: $|N_{G_1}[v_i]| = x, |N_{G_2}[v_i]| = y$(ただし $x+y \le \Delta$) とし,v_i へのラベリングをしてから $N_{G_1}[v_2, v_i]$ と $N_{G_2}[v_1, v_i]$ にラベリングする. このとき, その計算時間は $O(\sigma \cdot \sigma^{\Delta+x+1} \cdot \sigma^{\Delta+y+1})$ 時間すなわち $O(\sigma^{3\Delta+3})$ となる. これにより全体の計算時間 $F(n,\Delta)$ は以下のようになる.

$F(n,\Delta) = O(n(\Delta+2)^{3\Delta+3}(2\Delta+2)^2) = O(n\Delta^{3\Delta+6})$.

4.2 補題の一般化

次の補題は B アルゴリズムの実行可能性を保証するための定理の 1 つであり, [7] ではこの補題をもとに他の定理が示されている. まず, 関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$f(m) = \begin{cases} m & (m \le 2) \\ \frac{\Delta-2m-13}{6} f(m-2) & (m > 2) \end{cases}$$

補題 2. ([7]) $\Delta \ge 1000$, $\frac{\ln n}{\ln\Delta} < 0.01\Delta$ を満たすグラフにおいて, f と k を上述のものとしたとき以下を満たす.

I. $0 < m < \frac{\Delta-13}{2}$ のとき, $f(m) \ge (\frac{\Delta-2m-13}{6})^{m/2-1}$

II. $f(k) > n$

パラメータ α, β, t を導入することで, 補題 2 を一般化する.

補題 3. 定数 $\alpha > 0$, $\beta \ge \log_{10} 21$, $t \ge 1$ が与えられたとき, $\Delta \ge 10^\beta$, $\frac{\ln n}{\ln\Delta} < \alpha\Delta$ を満たすグラフにおいて, f は上述のものとして, $k = \lceil \frac{2\ln n}{\ln 0.1^t\Delta} + 2 \rceil$, $t < \beta$ としても, 補題 2 の 2 つの不等式を満たす.

証明. まず, I について帰納法を用いて証明する. 以下では LHS は左辺 (left-hand side) を, RHS は右辺 (right-hand side) を意味する.

$m = 1$ のとき

$$\begin{aligned} LHS &= f(1) = 1 \\ RHS &= \left(\frac{\Delta-15}{6}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

これより $\Delta \ge 21$ を満たすとき不等式は成り立つ.

$m = 2$ のとき

$$\begin{aligned} LHS &= f(2) = 2 \\ RHS &= \left(\frac{\Delta-17}{6}\right)^0 = 1 \end{aligned}$$

よって $m = 2$ のとき, 任意の Δ で不等式は成り立つ.

$2 < m < \frac{\Delta-13}{2}$ のとき, $m = x-2$ まで不等式が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} LHS = f(x) &= \frac{\Delta-2x-13}{6} f(x-2) \\ &\ge \frac{\Delta-2x-13}{6}\left(\frac{\Delta-2(x-2)-13}{6}\right)^{\frac{x}{2}-2} \\ &\ge \left(\frac{\Delta-2x-13}{6}\right)^{\frac{x}{2}-1} = RHS \end{aligned}$$

よって $m = x$ のときも不等式が成り立つので I は $10^\beta \ge 21$ を満たすときに限り成り立つことが示された.

次に II について証明する.

$$\begin{aligned} \ln n &= \frac{\ln n}{\ln 0.1^t\Delta} \ln 0.1^t\Delta & (2) \\ &< \left(\frac{\ln n}{\ln 0.1^t\Delta} + 1 - 1\right) \ln\frac{\Delta-2k-13}{6} & (3) \\ &\le \left(\frac{k}{2} - 1\right) \ln\frac{\Delta-2k-13}{6} & (4) \\ &= \ln\left(\frac{\Delta-2k-13}{6}\right)^{k/2-1} \le \ln f(k) \end{aligned}$$

式 (3) から式 (4) への変換は k の定義によるものなので成り立つ. 式 (2) から式 (3) への変換は次の式 (5) を満たすとき成り立つ.

$$0.1^t\Delta < \frac{\Delta-2k-13}{6} \quad (5)$$

これを整理して

$$k < \frac{(1-6\cdot 0.1^t)\Delta - 13}{2}$$

k の定義より $k \le \frac{2\ln n}{\ln 0.1^t\Delta} + 3$ なので

$$\frac{2\ln n}{\ln 0.1^t\Delta} + 3 < \frac{(1-6\cdot 0.1^t)\Delta - 13}{2} \quad (6)$$

式 (6) を満たすとき, 式 (5) は満たされる. これを整理して

$$\frac{\ln n}{\ln 0.1^t\Delta} < \frac{(1-6\cdot 0.1^t)\Delta - 19}{4} \quad (7)$$

ここで $\frac{\ln n}{\ln 0.1^t\Delta}$ について $\beta - t > 0$ を満たすとき以下の式変形が許される.

$$\begin{aligned} \frac{\ln n}{\ln 0.1^t\Delta} &= \frac{\ln n}{\ln\Delta} \cdot \frac{\ln\Delta}{\ln 0.1^t\Delta} \\ &< \alpha\Delta\frac{\ln\Delta}{\ln\Delta - t\ln 10} \\ &\le \alpha\Delta\frac{\beta\ln 10}{\beta\ln 10 - t\ln 10} \\ &= \alpha\Delta\frac{\beta}{\beta-t} & (8) \end{aligned}$$

式 (7) と式 (8) より

$$\frac{\alpha\beta}{\beta-t}\Delta < \frac{(1-6\cdot 0.1^t)\Delta-19}{4} \tag{9}$$

式 (9) を満たすとき, 式 (6) は満たされる. これを整理して

$$\alpha \leq \frac{\beta-t}{4\beta}\left(1-\frac{6}{10^t}-\frac{19}{10^\beta}\right)$$

以上から $\alpha \leq \frac{\beta-t}{4\beta}\left(1-\frac{6}{10^t}-\frac{19}{10^\beta}\right), \beta > t$ を満たすときに限り, $f(k) > n$ となり II が成り立つことが示された. □

ここで, 補題 1 に対してパラメータ α, β, t を導入し一般化した補題を証明することができる.

補題 4. $\alpha \leq \frac{\beta-t}{4\beta}\left(1-\frac{6}{10^t}-\frac{19}{10^\beta}\right), \beta > t$ を満たす定数 $\alpha > 0$, $\beta \geq \log_{10} 21, t \geq 1$ が与えられたとする. $\Delta \geq 10^\beta, \frac{\ln n}{\ln \Delta} < \alpha\Delta$ を満たすグラフにおいて, $k = \lceil \frac{2\ln n}{\ln 0.1^t \Delta} + 2 \rceil$ とした H-ラベリングが存在するとき, かつそのときに限り, $\sigma = \Delta + 2$ の $L(2,1)$-ラベリングが存在する.

本補題の条件式を満たすとき, B アルゴリズムを実行し, 満たさないとき, A アルゴリズムを実行することにする. 具体的には, $\alpha = \frac{6}{25}$ を実現するように, β, t を $t = \frac{\beta\varepsilon}{8+\varepsilon}$ を満たしながら十分大きくおく (ただし ε は正定数). このとき, アルゴリズム A の計算量は, $\frac{\ln n}{\ln \Delta} \geq \alpha\Delta$ から $O(n^{13.5}\Delta^6)$ となる. 一方, B アルゴリズムの計算量は $k \leq 3 + \frac{2\beta}{\beta-t}\cdot\frac{\ln n}{\ln \Delta} = 3 + (2+\frac{\varepsilon}{4})\frac{\ln n}{\ln \Delta}$ とすることができるので $O((\Delta+2)^{4k}) = O(k\Delta^{4k}) = O(\log n \cdot \Delta^{12+(8+\varepsilon)\ln n/\ln \Delta}) = O(\Delta^{12} n^{8+\varepsilon}\log n)$ より全体の計算時間は $O(n^{9+\varepsilon}\Delta^{15}\log n)$ となる.

4.3 外平面グラフ版貪欲アルゴリズム

以下では $\Delta \geq 9$ を仮定する.

$\Delta > \sqrt{2n + \frac{241}{16}} + \frac{19}{4}$ ならば, 外平面グラフの $L(2,1)$-ラベリング問題は線形時間で解くことができることを示す. 命題 3 における「$\sigma = \Delta + 2$ ならば $N[x]$ は高々 2 個の MV を含む」の「$\sigma = \Delta + 2$」という必要条件が, $\Delta = \Omega(\sqrt{n})$ の外平面グラフに対しても十分条件であることを示す.

定理 2. すべての $v \in V(G)$ において, $N^3[v]$ が高々 $\Delta - 10$ 個の MV を含み, $N[v]$ が高々 2 個の MV を含むとき $\sigma = \Delta + 2$ となる.

証明. すべての $v \in V(G)$ において $N^3[v]$ が高々 $\Delta - 10$ 個の MV を含み, $N[v]$ が高々 2 個の MV を含んでいると仮定する. まず, 距離が 2 以内の 2 つの MV が同じラベルを持たないようにすべての MV に 0 もしくは $\Delta+1$ を割り当てる. すべての $v \in V(G)$ において, $N[v]$ は高々 2 個の MV しか含まないので, このラベリングは正確に行われる.

次に外平面グラフのある頂点を根として OBFS 木をつくる. $L(2,1)$-ラベリングの定義に引き続き, OBFS 木の NMV を幅優先でラベリングしていく. 根の子が MV で $0[\Delta+1]$ とラベリングされているとき, その根に $2[\Delta-1]$ を割り当てる. 根の子が NMV のとき, その根には 1, 子には $\Delta - 1$ を割り当てる. 下記の条件を満たしつつ, 図 4 のように, ある頂点 v には x が, その周辺にある頂点 $v_a, v_b, v_c, v_d, v_e, v_f, v_g$ にはすでに a, b, c, d, e, f, g がそれぞれ割り当てられている. また, 辺 $v_a v$, 辺 $v_c v_e$, 辺 $v u_k$ 以外はそれぞれ存在するとは限らない (ただし $1 \leq k \leq i$).

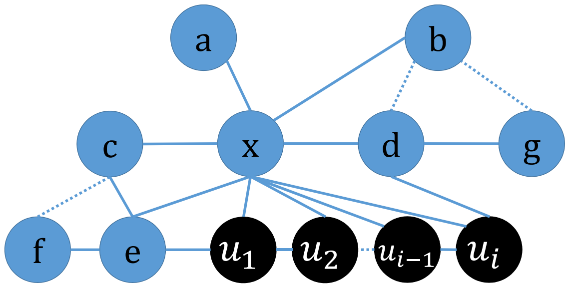

図 4

- $|x-a|, |x-b|, |x-c|, |x-d|, |x-e|, |d-g|, |e-f| \geq 2$
- a, b, c, d, e, x はそれぞれ異なる.
- $f \neq c, x$
- $g \neq d, x$

ただし e が割り当てられた頂点は v の子としてみなさず u_k のみを v の子として, これに対するラベリングを考える.

以下のように v の子の集合 $C(V)$ を分類する.

- u_1
- u_i
- $C'(v) = \{w \in C(v) | w$ は NMV で, w からの距離が 2 以下の頂点に MV を持つ $\}$
- $C''(v) = \{w \in C(v) | w$ は MV$\}$
- $R(v) = C(v) - \{u_1, u_i\} - C'(v) - C''(v)$

また $|C'(v)| \leq \Delta - 12$, $|C''(v)| \leq 2$, そして $d(v) = \Delta$ のとき $|C'(v)| \leq \Delta - 13$, $|C''(v)| \leq 1$ であることに注意せよ.

以下では, ケース 1 で $d(v) < \Delta$ の場合を, ケース 2 で $d(v) = \Delta$ の場合を考える. まず頂点 u_1 と u_i の次数に合わせてその 2 頂点にラベルを割り当て, $|C''(v)|$ の値によって再び場合分けをし, 残りの頂点 u_k へのラベリングの実行可能性を考える.

ケース 1 : $d(v) < \Delta$

$U(a,b,c,d,e,x) = \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\} \cup \{0,1,\Delta,\Delta+1\}$ とし, $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) = \{0,1,\ldots,\Delta+1\} - U(a,b,c,d,e,x)$ とする.

ケース 1.1 : $d(u_1) = d(u_i) = \Delta$

$C'(v)$ の頂点に $\bar{U}(a,b,c,d,e,x)$ のラベルを割り当て

る．$|C'(v)| \leq \Delta - 12$ と $|\bar{U}(a,b,c,d,e,x)| = \Delta + 2 - |U(a,b,c,d,e,x)| \geq \Delta - 10$ からこのようなラベリングは可能である．$Y(v)$ を $C'(v)$ のラベリングで使われていない $\bar{U}(a,b,c,d,e,x)$ のラベルの集合であるとする．この場合 $|C''(v)| = 0$ しかありえないので, $R(v)$ の頂点に $Y(v) \cup (\{1,\Delta\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})$ のラベルを割り当てる．

ケース 1.2 : $d(u_1) = \Delta, d(u_i) < \Delta$

u_i に $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \{d-1,d+1,g\}$ からラベル $\ell(u_i)$ を割り当て, $C'(v)$ の頂点に $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \ell(u_i)$ のラベルを割り当てる．$|C'(v)| \leq \Delta - 12$ と $|\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \ell(u_i)| \geq \Delta - 11$ からこのようなラベリングは可能である．$Y_d(v)$ を $C'(v)$ のラベリングで使われていない $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \ell(u_i)$ のラベルの集合であるとする．

ケース 1.2.1 : $|C''(v)| = 0$

u_1 には $0[\Delta+1]$ がラベリングされているので $R(v)$ の頂点に $Y_d(v) \cup (\{1,\Delta,\Delta+1\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})[Y_d(v) \cup (\{0,1,\Delta\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})]$ のラベルを割り当てる．

ケース 1.2.2 : $|C''(v)| = 1$

$R(v)$ の頂点に $Y_d(v) \cup (\{1,\Delta\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})$ のラベルを割り当てる．

ケース 1.3 : $d(u_1) < \Delta, d(u_i) = \Delta$

u_1 に $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \{e-1,e+1,f\}$ からラベル $\ell(u_1)$ を割り当て, $C'(v)$ の頂点に $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \ell(u_1)$ のラベルを割り当てる．ケース 1.2 と同様にこのようなラベリングは可能である．$Y_e(v)$ を $C'(v)$ のラベリングで使われていない $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \ell(u_1)$ のラベルの集合であるとする．

ケース 1.3.1 : $|C''(v)| = 0$

u_i には $0[\Delta+1]$ がラベリングされているので $R(v)$ の頂点に $Y_e(v) \cup (\{1,\Delta,\Delta+1\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})[Y_d(v) \cup (\{0,1,\Delta\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})]$ のラベルを割り当てる．

ケース 1.3.2 : $|C''(v)| = 1$

$R(v)$ の頂点に $Y_e(v) \cup (\{1,\Delta\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})$ のラベルを割り当てる．

ケース 1.4 : $d(u_1), d(u_i) < \Delta$

u_1 に $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \{e-1,e+1,f\}$ からラベル $\ell(u_1)$ を割り当て, u_i に $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \{d-1,d+1,g\} - \ell(u_1)$ からラベル $\ell(u_i)$ を割り当て，さらに $C'(v)$ の頂点に $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \ell(u_1) - \ell(u_i)$ のラベルを割り当てる．$|C'(v)| \leq \Delta - 12$ と $|\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \ell(u_1) - \ell(u_i)| \geq \Delta - 12$ からこのようなラベリングは可能である．$Y_{de}(v)$ を $C'(v)$ のラベリングで使われていない $\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \ell(u_1) - \ell(u_i)$ のラベルの集合であるとする．

ケース 1.4.1 : $|C''(v)| = 0$

$R(v)$ の頂点に $Y_{de}(v) \cup (\{0,1,\Delta,\Delta+1\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})$ のラベルを割り当てる．

ケース 1.4.2 : $|C''(v)| = 1$

$C''(v)$ には $0[\Delta+1]$ がラベリングされているので, $R(v)$ の頂点に $Y_{de}(v) \cup (\{1,\Delta,\Delta+1\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})[Y_{de}(v) \cup (\{0,1,\Delta\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})]$ のラベルを割り当てる．

ケース 1.4.3 : $|C''(v)| = 2$

$R(v)$ の頂点に $Y_{de}(v) \cup (\{1,\Delta\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\})$ のラベルを割り当てる．

まず, $|Y(v)|, |Y_d(v)|, |Y_{ed}(v)|$ について, 以下が成り立つ．
- $|Y(v)| = |\bar{U}(a,b,c,d,e,x)| - |C'(v)| = \Delta + 2 - |U(a,b,c,d,e,x)| - |C'(v)|$
- $|Y_d(v)| = |Y_e(v)| = |\bar{U}(a,b,c,d,e,x)| - 1 - |C'(v)| = \Delta + 1 - |U(a,b,c,d,e,x)| - |C'(v)|$
- $|Y_{ed}(v)| = |\bar{U}(a,b,c,d,e,x)| - 2 - |C'(v)| = \Delta + 2 - |U(a,b,c,d,e,x)| - |C'(v)|$

次に, 以下の式も成り立つ．
- $|\{0,1,\Delta,\Delta+1\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\}| = |U(a,b,c,d,e,x)| - 8$
- $|\{1,\Delta,\Delta+1\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\}| \geq |U(a,b,c,d,e,x)| - 9$
- $|\{0,1,\Delta\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\}| \geq |U(a,b,c,d,e,x)| - 9$
- $|\{1,\Delta\} - \{a,b,c,d,e,x-1,x,x+1\}| \geq |U(a,b,c,d,e,x)| - 10$

したがって $|R(v)| \leq \Delta - 6 - |\{u_1,u_i\}| - |C'(v)| - |C''(v)| = \Delta - 8 - |C'(v)| - |C''(v)|$ なのでケース 1 のそれぞれのラベリングは可能である．

ケース 2 : $d(v) = \Delta$

$U(a,b,c,d,e) = \{a,b,c,d,e\} \cup \{0,1,\Delta,\Delta+1\}$ とし, $\bar{U}(a,b,c,d,e) = \{0,1,\ldots,\Delta+1\} - U(a,b,c,d,e)$ とする．

ケース 2.1 : $d(u_1) = \Delta, d(u_i) < \Delta$

u_i に $\bar{U}(a,b,c,d,e) - \{d-1,d+1,g\}$ からラベル $\ell(u_i)$ を割り当て, $C'(v)$ の頂点に $\bar{U}(a,b,c,d,e) - \ell(u_i)$ のラベルを割り当てる．$|C'(v)| \leq \Delta - 12$ と $|\bar{U}(a,b,c,d,e,x) - \ell(u_i)| = \Delta + 2 - |U(a,b,c,d,e)| - 1 \geq \Delta - 8$ からこのようなラベリ

ングは可能である．

$Y_d(v)$ を $C'(v)$ のラベリングで使われていない $\bar{U}(a,b,c,d,e,x)-\ell(u_i)$ のラベルの集合であるとする．この場合 $|C''(v)|=0$ しかありえない．v には $0[\Delta+1]$ がラベリングされているので $R(v)$ の頂点に $Y_d(v)\cup(\{\Delta\}-\{a,b,c,d,e\})[Y_d(v)\cup(\{1\}-\{a,b,c,d,e\})]$ のラベルを割り当てる．

ケース 2.2： $d(u_1)<\Delta, d(u_i)=\Delta$

u_1 に $\bar{U}(a,b,c,d,e)-\{e-1,e+1,f\}$ からラベル $\ell(u_1)$ を割り当て, $C'(v)$ の頂点に $\bar{U}(a,b,c,d,e)-\ell(u_1)$ のラベルを割り当てる．ケース 2.1 と同様にこのようなラベリングは可能である．

$Y_e(v)$ を $C'(v)$ のラベリングで使われていない $\bar{U}(a,b,c,d,e)-\ell(u_1)$ のラベルの集合であるとする．この場合 $|C''(v)|=0$ しかありえない．v には $0[\Delta+1]$ がラベリングされているので $R(v)$ の頂点に $Y_e(v)\cup(\{\Delta\}-\{a,b,c,d,e\})[Y_e(v)\cup(\{1\}-\{a,b,c,d,e\})]$ のラベルを割り当てる．

ケース 2.3： $d(u_1), d(u_i)<\Delta$

u_1 に $\bar{U}(a,b,c,d,e)-\{e-1,e+1,f\}$ からラベル $\ell(u_1)$ を割り当て, u_i に $\bar{U}(a,b,c,d,e)-\{d-1,d+1,g\}-\ell(u_1)$ からラベル $\ell(u_i)$ を割り当て, さらに $C'(v)$ の頂点に $\bar{U}(a,b,c,d,e)-\ell(u_1)-\ell(u_i)$ のラベルを割り当てる．$|C'(v)|\le\Delta-12$ と $|\bar{U}(a,b,c,d,e)-\ell(u_1)-\ell(u_i)|\ge\Delta-9$ からこのようなラベリングは可能である．$Y_{de}(v)$ を $C'(v)$ のラベリングで使われていない $\bar{U}(a,b,c,d,e)-\ell(u_1)-\ell(u_i)$ のラベルの集合であるとする．

ケース 2.3.1： $|C''(v)|=0$

v には $0[\Delta+1]$ がラベリングされているので, R(v) の頂点に $Y_{de}(v)\cup(\{\Delta,\Delta+1\}-\{a,b,c,d,e\})[Y_{de}(v)\cup(\{0,1\}-\{a,b,c,d,e\})]$ のラベルを割り当てる．

ケース 2.3.2： $|C''(v)|=1$

v には $0[\Delta+1]$ がラベリングされているので, $R(v)$ の頂点に $Y_{de}(v)\cup(\{\Delta\}-\{a,b,c,d,e\})[Y_{de}(v)\cup(\{1\}-\{a,b,c,d,e\})]$ のラベルを割り当てる．

まず, $|Y_d(v)|, |Y_e(v)|, |Y_{ed}(v)|$ について, 以下が成り立つ．

- $|Y_d(v)|=|Y_e(v)|=|\bar{U}(a,b,c,d,e)|-1-|C'(v)|=\Delta+1-|U(a,b,c,d,e)|-|C'(v)|$
- $|Y_{ed}(v)|=|\bar{U}(a,b,c,d,e)|-2-|C'(v)|=\Delta-|U(a,b,c,d,e)|-|C'(v)|$

次に, 以下の式も成り立つ．

- $|\{0,1\}-\{a,b,c,d,e\}|\ge|U(a,b,c,d,e)|-13$
- $|\{\Delta,\Delta+1\}-\{a,b,c,d,e\}|\ge|U(a,b,c,d,e)|-13$
- $|\{1\}-\{a,b,c,d,e\}|\ge|U(a,b,c,d,e)|-14$
- $|\{\Delta\}-\{a,b,c,d,e\}|\ge|U(a,b,c,d,e)|-14$

したがって $|R(v)|\le\Delta-5-|\{u_1,u_i\}|-|C'(v)|-|C''(v)|=\Delta-7-|C'(v)|-|C''(v)|$ なのでケース 2 のそれぞれのラベリングは可能である．

$C(v)$ のラベリングが有効であることを確かめることは簡単である．以上のことから $\sigma=\Delta+2$ である． □

定理 2 から $N^3[v]$ が高々 $\Delta-10$ 個しか MV を含まないようなグラフでは, 命題 3 の $\sigma=\Delta+2$ 成立の必要条件である,「 $v\in V(G)$ において $N[v]$ は高々 2 個しか MV を含まない」が, $\sigma=\Delta+2$ 成立の十分条件でもあることがわかる．これを次の系としてまとめる．

系 1. $N^3[v]$ が高々 $\Delta-10$ 個しか MV を含まないとする．$v\in V(G)$ において $N[v]$ は高々 2 個しか MV を含まないとき, またそのときに限り, $\sigma=\Delta+2$ となる．

系 2. $\Delta>\sqrt{2n+\frac{241}{16}}+\frac{19}{4}$ とする．すべての $v\in V(G)$ において $N[v]$ は高々 2 個しか MV を含まないとき, またそのときに限り, $\sigma=\Delta+2$ となる．

証明. すべての $v\in V(G)$ において $N[v]$ は高々 2 個しか MV を含まないと仮定する． 今, グラフ中に MV が $\Delta-9$ 個あったとし, それらを $u_k, k=1,\ldots,\Delta-9$ とする．2 個の MV につながっている 2 つの辺は隣接することはないので 2 個の MV につながっている辺の数は高々 $\frac{\Delta-9}{2}$ である．$E(u_k)$ を u_k に接続する辺の集合とすると, $|\bigcup_{1\le k\le\Delta-9}E(u_k)|\ge\Delta(\Delta-9)-\frac{\Delta-9}{2}$ である．連結な n 頂点の外平面グラフの辺数はオイラーの公式より高々 $2n-3$ であるため,

$$2n-3\ge|E|\ge|\bigcup_{1\le k\le\Delta-9}E(u_k)|\ge(\Delta-\frac{1}{2})(\Delta-9)$$

が成立する．この不等式は $\Delta\le\sqrt{2n+\frac{241}{16}}+\frac{19}{4}$ と変形できる．以上をまとめると, 連結な外平面グラフ内に $\Delta-9$ 個以上 MV を含むならば, $\Delta\le\sqrt{2n+\frac{241}{16}}+\frac{19}{4}$ が成立することとなる．対偶をとると, $\Delta>\sqrt{2n+\frac{241}{16}}+\frac{19}{4}$ のとき MV の数はグラフ全体で高々 $\Delta-10$ 個である．したがって系 1 からこの系は成り立つ． □

系 2 の条件は線形時間で確認できる． すなわち, $\Delta>\sqrt{2n+\frac{241}{16}}+\frac{19}{4}$ を満たすグラフに対しては線形時間で σ を決定することができる．また $\sigma=\Delta+2$ のときは, $L(2,1)$-ラベリング自体も定理 2 の証明で用いた貪欲アルゴリズムにより得ることができるが, その計算時間も線形である．

以上から, A アルゴリズム, B アルゴリズムを適用するグラフは $\Delta\le\sqrt{2n+\frac{241}{16}}+\frac{19}{4}$ を満たすものに限定すればよいため, $O(\Delta)=O(\sqrt{n})$ を仮定してよい．

5. まとめ

以上のように, 各種条件に適したアルゴリズムを切り替えることにより, 外平面グラフの最適な $L(2,1)$-ラベリングは多項式時間で求めることができる. 以下, その条件をまとめておく.

β を十分大きい正定数, ε を微小な正定数とする.

- $\Delta > \sqrt{2n + \frac{241}{16}} + \frac{19}{4}$ の場合, 貪欲アルゴリズムにより線形時間で求めることができる.
- $\Delta \leq \sqrt{2n + \frac{241}{16}} + \frac{19}{4}$ の場合,
  - $\frac{\ln n}{\ln \Delta} < \frac{4}{25}\Delta, \Delta \geq 10^{\beta}$ の場合, B アルゴリズムにより $O(n^{16.5+\varepsilon} \log n)$ 時間で求めることができる.
  - それ以外の場合, A アルゴリズムにより $O(n^{16.5})$ 時間で求めることができる.

以上から次の定理が成立する.

定理 3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 外平面グラフの最適 $L(2,1)$-ラベリングのための $O(n^{16.5+\varepsilon} \log n)$ 時間アルゴリズムが存在する.

謝辞　本研究は旭硝子財団, JSPS 科研費 JP26540005, MEXT 科研費 JP24106004 の助成を受けた.

参考文献

[1] T.Calamoneri, R. Petreschi.: *$L(h,1)$-labering subclasses of planar graphs*, J.Parallel and Distributed Comput., 64:414–426 (2004).
[2] N. Eggemann, F. Havet, S. D. Noble.: *$k - L(2,1)$-labeling for planar graphs is np-complete for $k \geq 4$*, Discrete Applied Mathematics, 158(16): 1777–1788 (2010).
[3] J. Fiala, P. A. Golovach, and J. Kratochvíl.: *Distance constrained labelings of graphs of bounded treewidth*, In Proceeding of the 32nd International Colloquium on Automata, Languages and Programming, pages 360–372. Springer-Verlag (2005).
[4] J. R. Griggs and R. K. Yeh.: *Labelling graphs with a condition at distance 2.*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 5(4):586–595, (1992).
[5] T. Hasunuma, T. Ishii, H. Ono, Y. Uno.: *A linear time algorithm for $L(2,1)$-labeling of trees*, Algorithmica, 66(3): 654–681 (2013).
[6] T. Hasunuma, T. Ishii, H. Ono, Y. Uno.: *An $O(n^{1.75})$ algorithm for $L(2,1)$-labeling of trees*, Theoretical Computer Science, 410 (38): 3702–3710 (2009).
[7] A. E. Koller.: *The frequency assignment problem*, PhD thesis, Brunel University, School of Information Systems, Computing and Mathematics (2005).