コード配色の変更を認めるマスターマインドの推測回数に関する考察

迫田 賢宜[1,a)]　小野 廣隆[2,b)]

概要：ゲーム・マスターマインドは 2 人によるゲームであり, 出題者があらかじめ定めたピンの配置に対するクエリーを通して解答者がそのピンの配置を推定するゲームである. 最もよく遊ばれているマスターマインドは, 6 色 4 本のピンを配置するものであり, それはどのような配置であったとしても, 必ず 5 回のクエリーによりピンの配置を知ることができることが知られている. 本論文ではそのルールを拡張した「出題者が 1 回だけコードの一部を変化させることができる」場合についての推測回数について考察する.

キーワード：マスターマインド

On the Number of Guesses for Mastermind with One-Pin-Change

Sakoda Genki[1,a)]　Ono Hirotaka[2,b)]

Abstract: Mastermind is a board game played by two players; code-maker and code-breaker. The code-maker just sets a secret code at the beginning of the game, and the code-breaker makes a "guess" and receives the score of the guess one by one, until the guess matches the secret code. The most popular setting uses 4 pins of 6 colors for a secret code, and it is known that the code-breaker can identify any secret code via 5 guesses. In this paper, we consider an extended variant of mastermind, where the code-maker can change the color of a pin in the secret code after the first guess. A obvious upper bound on the number of guesses to idenfify the changed secret code is 10. We investigate the number guesses to identify the changed secrete code.

Keywords: Mastermind

1. はじめに

マスターマインドとはボードゲームの一種であり, 2 人のプレイヤーが出題者と解答者に分かれて行う. 最も一般的なマスターマインドは, 出題者は 6 色あるピンから 4 本を選び, 解答者に見えないように並べる, というものである. なお, このピンの配置をコードと呼び, コードに使用するピンの色の重複は認める. 解答者は, 出題者の作成したコードを推測し, コードを明らかにすることがこのゲームの目的である. 出題者は, 解答者の推測に対して次のルールで返答をする.

コードと推測を照らし合わせて

- 位置も色も正しいピンがあれば, 黒いピンを立てる.
- 色は正しいが位置が違うピンがあれば, 白いピンを立てる.

以下, 本論文ではコードに使用されるピンと返答に使用されるピンとを区別するために, 返答に使われる黒いピンを "ヒット", 白いピンを "ブロー" と呼ぶ. 2 人のプレイヤーは推測と返答を繰り返し, 解答者が 4 ヒットの返答を得る, つまりコードが判明した時点でゲームは終了する (図 1).

マスターマインドは, ボードゲームとして 1970 年代にイギリスで発売され, その後アメリカや日本でも発売された.

[1] 九州大学経済学部
[2] 九州大学大学院経済学研究院
[a)] 1EC13192K@s.kyushu-u.ac.jp
[b)] hirotaka@econ.kyushu-u.ac.jp

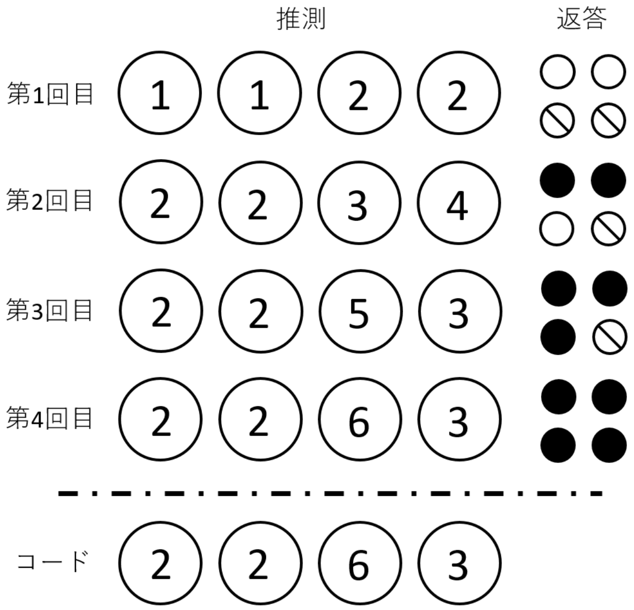

図 1　ゲーム進行の例

ボードゲームとして特別な道具を使わずとも, ピンの色と数字を対応させることで数当てゲームとして楽しむことができる.

6 色 4 ピンで行うマスターマインドに関して, D. E. Knuth は, 解答者は高々 5 回の推測回数でコードを判別できることを示している?. また, 出題者が 1 度だけ返答に嘘をついてもよい拡張ルールを設けたマスターマインドに対する推測回数の上界を研究した論文や?, 解答者が直前の推測と返答しか記憶できないという制限を設けたマスターマインドの研究などがある?.

2. 1 ピン変更可のマスターマインド

2.1 ルールの定義

本論文で取り扱う, 拡張版マスターマインドでのルールを定義する. 一般的なマスターマインドのルールに加え, 出題者が自分で作成したコードのピンの色を 1 つだけ, ゲームの途中, 任意のタイミングで変更してもよい, というルールを設ける. このとき, 解答者が第 i 回目に行った推測の直後の返答, もしくはコード配色の変更を第 i 回目の返答 (変更) とする. この様子を表したものが図 2 である.

2.2 自明な上界

まず, このゲームにおける推測回数の自明な上界を示すために, 出題者に対して, コード配色の変更時期に制限をかけたゲームを考える. 第 i 回目に出題者は必ずコード配色を変えるとする. このとき, 解答者は i+1 回目の推測から Knuth のアルゴリズムを用いることで, 高々 $i+5$ 回の推測でコードを判別することができる.

このことから, 本論文における拡張版マスターマインドの自明な上界が得られる. 出題者が, いつコードの配色を変えるかわからない場合, 解答者は 1 回目の推測から Knuth のアルゴリズムを用いてゲームを行う. 5 回以内の推測でゲームが終わらなければ, 出題者が 1〜4 回目の返答ののちにコードの配色を変更したことがわかる. したがって, 解答者は 6 回目の推測から新たに Knuth のアルゴリズムを用いゲームをすることで, 高々 10 回の推測でコードを判別することができる.

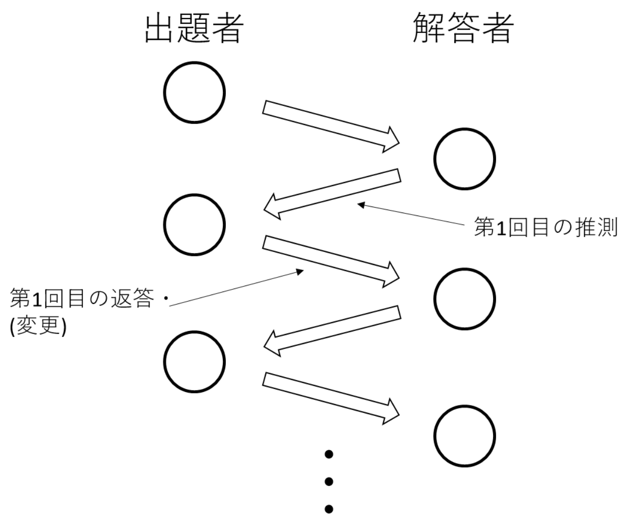

図 2　アクションの定義

定理 1. 1 ピン変更可のマスターマインドでは, 高々 10 回の推測回数でコードを判別することができる.

3. 推測回数の下界

本節では, 1 ピン変更可のマスターマインドの推測回数の下界, すなわちどのようなコード, あるいはピン変更に対しても, コード判別のためにはこれだけの回数は推測する必要がある, という回数について考察する.

定理 2. 1 ピン変更可のマスターマインドで, 確実にコードを判別するには少なくとも 9 回の推測が必要である.

証明.
解答者が, Knuth のアルゴリズムに基づいてゲームを進行するとする. 出題者が 4 回目にコード配色を変えるとき, 解答者が 5 回目の推測で得られる返答は 3 ヒットである. このとき, この後 2 回の推測ではコードを判別することができないことを示す.

解答者が, 直前の返答で 3 ヒットが得られたとする. つまりコードは, 5 回目の推測に使われた数のうち 1 つを他の数字に変えたものである. このコードの候補数は 5 × 4 = 20 通りある. これに対して, 出題者の返答は, 3 ヒット 1 ブローという返答がありえないことに注意すると, 図 3 のように 14 通りのパターンに分けられる. 2 回でコードを判別するためには, 2 回目であらゆるコードの候補に対して 4 ヒットを得なければならない. しかし解答者は, 残りの 20

通りのコード候補数に対して, 1 回目の推測で高々 14 通りの返答にしか分類できない. つまり, 必ず同じ返答に分類される候補が存在する. よって 2 回の推測ではコードを判別することはできない.

解答者がコードを見つけるのに 6 回以上の推測を必要するとする. 解答者が 6 回の推測でコードを判別する手順を持つならば, 出題者は 5 回目の返答ののちにコード配色を変更するという戦略をとると仮定すると, 上と同様の議論により, 6 回目の返答では 3 ヒットの返答が得られ, ここから 1 回の推測でコードを見つけることができない. 解答者がコードを判別するのに 7 回以上の推測を要するのであれば, 出題者は 6 回目の返答ののちにコード配色を変更することで, 7 回以内でのコードの判別を防ぐことができる.

よってこのゲームにおいて, 解答者は 7 回の推測ではコードを判別することができない. つまり, コードの判別には, 少なくとも 8 回の推測は必要であることがわかる.

次に, 8 回の推測ではコードを見つけることができないことを示す.

解答者が Knuth のアルゴリズムに基づいてゲームを進行し, 出題者が 4 回目の推測に対する返答を行った後にコードを変更したとする. このとき, 上の議論と同様に 5 回目の推測に対しては必ず 3 ヒットの返答となる. 1111 に対してこの返答がきた場合, 変更後のコードには 1 が使われていないことがわかる. この状態から変更後のコードを見つけることを考える. 一般性を失わずに, 解答者の次の推測を 2345, 2234, 2233, 2223, 2222 とする. どの推測に対する返答を考えたときでも, 返答には高々 1 つのヒットもしくはブローしか立たない. よって返答は 0 ヒット 0 ブローであるか, そうでないかの 2 つの場合に分けられる.

・推測に対して 0 ヒット 0 ブロー 2345, 2234 に対する場合, 変更後のコードに用いられた数字が高々 2 通りに絞られる. このときは残り 2 回の推測で, 正しいコードに使われた数字を判別できる. 他方で, 2233, 2223, 2222 に対する返答だったとき, 少なくとも使われている可能性のある候補が 3 つある. これは残り 2 回の推測では使われている数字を判別することができない.

・推測に対して 1 ヒットもしくは 1 ブロー上記とは逆に, この場合 2345, 2234 のときに少なくともコードに使用されている数字の候補が 3 つとなり, 残り 2 回の推測で特定することができない. 2233, 2223, 2222 のとき, 使われている色の候補は高々 1 つであり, この後 2 回の推測でコードに使われている色は特定できる.

以上のことより, 第 4 回目に出題者がコードを変更した場合, 解答者はその後 3 回の推測で変更後のコードに用いられている数字を特定することはできない. このことから, 解答者はこの状況で 3 回でコードを判別することができないことがわかる.

解答者がコードの判別に 6 回以上の推測を必要とするアルゴリズムを用いてゲームを進行するとする. このとき, 5 回目の推測の後に出題者がコードを変更すれば, 先に示したように 2 回でコードを判別することができない.

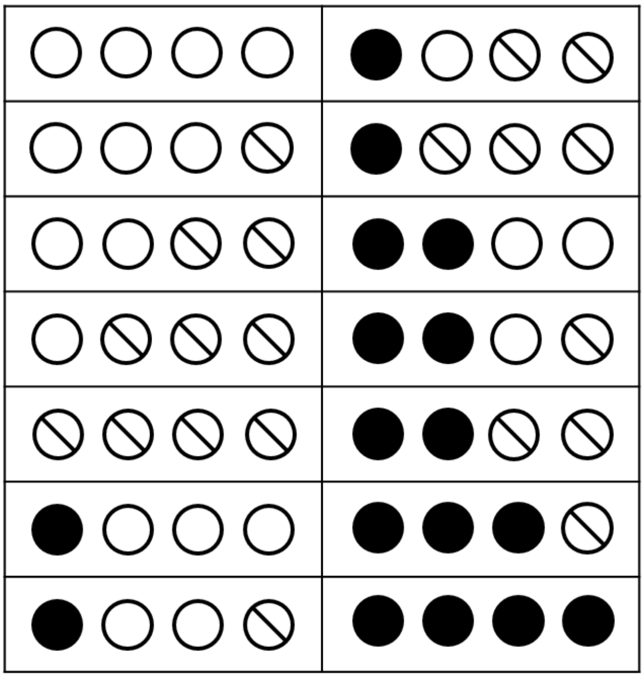

図 3　返答の種類

よって解答者はこのゲームにおいて 8 回でコードを判別することはできず, 少なくとも 9 回の推測が必要であることがわかる. □

4. 3 ヒットが得られたあとの推測回数

この拡張版マスターマインドにおいて, 解答者が Knuth のアルゴリズムに基づいてゲームを進行するとすると, 出題者が 4 回目までにコードの変更を行わなかった場合, 5 回目の推測で必ずコードが判別する. よって出題者は 1〜4 回目のどこかでコードを変更すると仮定する. このように仮定をおいた場合でも, 出題者のコード変更の仕方によっては, 返答によって得られるコードの候補数が 0 となることがあるが, このときは解答者が次の推測から Knuth のアルゴリズムを始めればよく, 9 回以内の推測でコードを判別することができる.

ここで, 出題者が 4 回目の推測の後にコードを変更した場合を考える. コードのうち変更できるのは 1 つのピンのみなので, 5 回目の推測に対する返答は 3 ヒットであることがわかる.

5 回目の推測で, 解答者が 3 ヒットの返答を得られたとする. この後, 4 回の推測でコードを見つけることができることを示す. ここで, 5 回目の推測に用いられた推測を, 1234, 1123, 1122, 1112, 1111 とする. それぞれの場合に対して, どのようなコードであっても 4 回の推測でコードを判別できることを示せばよい. ちなみに, 各場合それぞれに 20 通りのコードの候補がある.

・1234 の場合

まず, 1 回目に 1122 の推測をする. すると 20 通りのコードの候補は 2 ブロー [1], 1 ブロー [4], 1 ヒット 2 ブロー [2], 1 ヒット 1 ブロー [6], 1 ヒット [4], 2 ヒット 1 ブロー [2], 2 ヒット [1] の 7 パターンの返答に分類される. なお [] 内の数値はそれぞれの返答後に残るコードの候補数を表している. しらみつぶしに推測を行うと, n 回の推測で n 個の候補からコードを判別できることを考え, ここでは 1 ブロー, 1 ヒット 2 ブロー, 1 ヒットについて残り 3 回の推測でコードを判別することを示す.

まず, 1 ブローと 1 ヒットの返答が得られた場合は, どちらにおいても 3344, 1 ヒット 1 ブローの返答が得られた場合, 1256 と推測する. 得られる各返答に対する残りの候補数は全て 2 つとなり, これはあと 2 回の推測でコードを判別することができる.

以上のことから, 1234 の推測に対して 3 ヒットの返事が得られた場合, その後 4 回の推測でコードを判別することができる.

・1123 の場合

2233 と推測する. このとき, 上と同様に 7 通りの返答に分けられる. この中で候補数が 4 以上になるのは, 1 ブロー [4], 1 ヒット 1 ブロー [6], 1 ヒット [4] の場合である. 1 ヒット 1 ブローであれば, 4455, それ以外の 2 つのときは 1114 と推測するとどの場合も候補数が 2 以下となり, あと 2 回の推測でコードを判別することができる.

・1122 の場合

5162 と推測する. このとき候補が 4 以上残るのは, 1 ヒット 1 ブロー [6], 1 ヒット 2 ブロー [4], 2 ヒット [6] の場合である. 1 ヒット 1 ブローであれば 2323, 1 ヒット 2 ブローなら, 1525, 2 ヒットならば 3132 と推測することで, どの場合でも候補数が 2 以下となる.

・1112 の場合

1342 と推測する. 1 ヒット 1 ブロー [5], 2 ヒット [6] のときのみ候補が 4 以上残る. 1 ヒット 1 ブローのとき 5634, 2 ヒットのときには 1512 と推測することで 4 回でコードを判別することができる.

・1111 の場合

1234 と推測する. このとき候補が 4 以上残るのは, 1 ヒット 1 ブロー [6], 1 ヒット [6] の場合である. それぞれ次の推測で 5651, 3321 と推測すればよい.

これらのことから, 直前の推測で 3 ヒットの返答が得られた場合には, 上のように推測を行うことで, その後 4 回の推測があればあらゆるコードが判別できることが示された.

5. 今後の課題

本論文では, コードの変更を一度だけ認めたマスターマインドにおいて, 8 回の推測ではコードを判別することができないこと, また, 3 ヒットの返答が得られた後は, 4 回の推測でコードが判別可能なことを示した. これらをもとに, 自明な上界の 10 回より少ない推測回数である, 9 回の推測回数でコードを判別できることを示すことが今後の課題である.

謝辞

本研究は旭硝子財団, JSPS 科研費 JP26540005, MEXT 科研費 JP24106004, JP24220003 の助成を受けた.

参考文献

[1] D. E. Knuth: The Computer As Master Mind, Journal of Recreational Mathematics, 9(1), pp. 1–6 (1976).
[2] L. T. Huang, S. T. Chen, S. S. Lin: Exact-Bound Analyzes and Optimal Strategies for Mastermind with a Lie, Advances in Computer Games, Lecture Notes in Computer Science 4250, pp. 195–209 (2005).
[3] J. Stuckman, G. Q. Zhang: Mastermind is NP-Complete, arxiv:cs/0512049, (2005).