立方体グラフにおける距離3独立集合問題の近似について

江藤 宏[1,a)]　柳 植龍[1,b)]　宮野 英次[1,c)]

概要：本稿では，最大独立頂点集合問題 (Maximum Independent Set Problem，MaxIS) を一般化した問題である最大距離 d 独立頂点集合問題 (Maximum Distance-d Independent Set Problem, MaxDdIS) を取り扱う．ある整数 $d \geq 2$ について，無向グラフ $G = (V, E)$ の距離 d 独立頂点集合とは，任意の 2 頂点 $u, v \in S$ について，G における u と v の 2 頂点間距離が少なくとも d となるような頂点部分集合 $S \subseteq V$ のことである．無向グラフ G が与えられたとき，MaxDdIS の目標は，頂点数最大の距離 d 独立頂点集合を探すことである．本稿では，特に入力グラフを立方体グラフに限定した場合の MaxD3IS の計算複雑さおよび近似可能性について考える．本稿の主な結果は以下である．(1) MaxD3IS が $\mathcal{NP}$ 困難であることを示す．また，(2) 最大次数が Δ の入力グラフにおいて MaxIS における $\frac{\Delta+3}{5}$-近似アルゴリズムを用いて，MaxD3IS に対して 2.4-近似アルゴリズムを示す．さらに，(3) 任意の正数 $\varepsilon > 0$ について，$2+\varepsilon$-近似アルゴリズム，および，(4) 近似率 $2+\varepsilon$ の改善として 2-近似アルゴリズムを示す．

キーワード：最大距離 d 独立頂点集合問題，$\mathcal{NP}$ 困難性，近似アルゴリズム

Approximability of Distance-3 Independent Set Problem on Cubic Graphs

Hiroshi Eto[1,a)]　Zhilong Liu[1,b)]　Eiji Miyano[1,c)]

Abstract: This paper studies generalized variants of the Maximum Independent Set problem (MaxIS), called the Maximum Distance-d Independent Set problem (MaxDdIS for short). A distance-d independent set for an integer $d \geq 2$ in an unweighted graph $G = (V, E)$ is a subset $S \subseteq V$ of vertices such that for any pair of vertices $u, v \in S$, the distance between u and v is at least d in G. Given an unweighted graph G, the goal of MaxDdIS is to find a maximum distance-d independent set in the input graph G. In this paper we consider the complexity and the approximability of MaxD3IS (i.e., $d = 3$) on cubic graphs. The main results in the paper are as follows: (1) We first prove that even if the input graph is restricted to cubic graphs, it is $\mathcal{NP}$-hard to approximate MaxD3IS. As for approximability of MaxD3IS on cubic graphs, (2) we design a 2.4-approximation algorithm by using the $\frac{\Delta+3}{5}$-approximation algorithm for MaxD2IS on graphs of maxmimum degree Δ. Furthermore, (3) we provide a $2+\varepsilon$-approximation algorithm for a small $\varepsilon > 0$, and (4) we show that the $2+\varepsilon$-approximation ratio can be improved to 2 by using a more refined estimation on the approximation ratio.

Keywords: Maximum distance-d independent set problem, $\mathcal{NP}$-hardness, approximaiton algorithms

[1] 九州工業大学
Kyushu Institute of Technology　680–4 Kawazu, Iizuka-shi, Fukuoka, 820–8502 Japan
[a)] eto@theory.ces.kyutech.ac.jp
[b)] liu@theory.ces.kyutech.ac.jp
[c)] miyano@ces.kyutech.ac.jp

1. はじめに

最大独立頂点集合問題（Maximum Independent Set problem，MaxIS）は，スケジューリング，コンピュータビジョン，パターン認識，符号理論，地図ラベリング，計算生物学など，様々な分野での応用があり，計算科学の中で重要な問題の一つとなっている．MaxIS の入力は無向グラフ $G = (V, E)$ である． G の独立頂点集合とは，すべての 2 頂点 $u, v \in S$ の間の辺 (u, v) が E に含まれないような頂点部分集合 $S \subseteq V$ のことである．Max IS は，$|S|$ が最大となるような独立頂点集合 S を G より探し出す最大化問題である．MaxIS は $\mathcal{NP}$ 困難であることが示された最初の問題の一つであり，他の問題の $\mathcal{NP}$ 困難性を証明するための元問題として広く利用されている [9]．さらに，MaxIS は，次数 3 の正則平面グラフ [8]，長さ 3 の閉路を含まないグラフ [16]，最小閉路の長さが大きいようなグラフ [15] などの，非常に限定されたグラフの部分クラスに対しても $\mathcal{NP}$ 困難のままであることが知られている．近似困難性についても，正数 $\varepsilon > 0$ について，$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ が成り立たないという仮定のもとで，MaxIS に対して多項式時間で動作する $n^{1-\varepsilon}$ 近似アルゴリズムは存在しないことが，文献 [12] で示されている．一方で，入力グラフが入力グラフが，例えば，2 部グラフ [11]，弦グラフ [6]，円弧グラフ [7]，比較可能グラフ [10] やその他のグラフクラス [4], [13], [14] に限定された場合には，MaxD2IS に対して多項式時間アルゴリズムを設計することができる．

本稿では，MaxIS の一般化問題である最大距離 d 独立頂点集合問題（Maximum Distance-d Independent Set problem，DdIS）を考える．整数 $d \geq 2$ について，無向グラフ $G = (V, E)$ の距離 d 独立頂点集合とは，任意の 2 頂点 $u, v \in S$ について，G において u と v の 2 頂点間距離が少なくとも d となるような頂点部分集合 $S \subseteq V$ のことである．ある定数 $d \geq 2$ について, DdIS は以下のような問題として定式化できる [2].

最大距離 d の独立集合問題 (MaxDdIS)
入力: グラフ $G = (V(G), E(G))$.
目的: G において，頂点数が最大となる距離 d 独立頂点集合 S を見つけ出す.

すなわち，MaxIS は，距離 $d = 2$ とした MaxD2IS と同一の問題である．文献 [5] では，正数 $d \geq 3$ における MaxDdIS について，平面グラフおよび 2 部グラフ，弦グラフについて近似困難性および計算容易性が示されている．本稿では，入力グラフをすべての頂点次数を 3 に限定した立方体グラフとした場合の MaxD3IS の計算困難性および近似可能性について考える．以下が本稿の主な結果である：

(i) 入力グラフを立方体グラフに限定したとしても MaxD3IS は $\mathcal{NP}$ 困難である.
(ii) 最大次数が Δ となるグラフを入力に限定した場合の MaxD2IS に対する $\frac{\Delta+3}{5}$-近似アルゴリズムを利用することにより，入力グラフを立方体グラフに限定した場合には，MaxD3IS に対して 2.4-近似アルゴリズムが設計できる.
(iii) 任意の正数 $\varepsilon > 0$ について，立方体グラフにおける MaxD3IS に対して $(2 + \varepsilon)$-近似アルゴリズムが設計できる.
(iv) $(2 + \varepsilon)$-近似アルゴリズムの近似率をより詳細な近似解析を行うことにより，2 まで改善することができる.

本稿の構成は以下である．まず第 2 節において記号や表記について述べる．第 3 節では，立方体グラフに入力を限定したとしても MaxD3IS が NP 困難のままであることを示し，第 4 節においてで立方体グラフを入力とした場合の MaxD3IS に対して，近似アルゴリズムを設計する．

2. 準備

無向グラフを $G = (V, E)$ とする．ここで V および E はそれぞれ頂点集合および辺集合を表す．また，グラフ G の頂点集合および辺集合を，それぞれ $V(G)$ および $E(G)$ と表すこともある．u と v を端点とする無向辺を (u, v) と表記する．G の 2 頂点 u と v について，u から v の最短経路の長さ，すなわち，u から v の距離を $dist_G(u, v)$ と表す．グラフ G_S は，$V(G_S) \subseteq V(G)$ および $E(G_S) \subseteq E(G)$ であるとき，G の部分グラフという．頂点部分集合 $U \subseteq V$ について，$G[U]$ により U によって誘導される部分グラフを表す．

整数 $d \geq 1$ とグラフ G に対して，$dist_G(u, v) \leq d$ を満たすようなすべての 2 頂点 $u, v \in V(G)$ の間を辺 (u, v) で結ぶことで得られる d 次のべきグラフは $G^d = (V(G), E^d)$ で表される．$E(G) \subseteq E^k$ を満たすので，$E(G)$ のオリジナルの辺もべきグラフ G^d に含まれている．頂点 v_i を端点とする辺の数を次数という．立方体グラフとは，全頂点の次数が 3 であるグラフであり，3 正則グラフとも呼ばれる．

入力グラフ G に対して，あるアルゴリズム ALG により得られる頂点部分集合の頂点数を $ALG(G)$ とし，最適アルゴリズムにより得られる頂点部分集合の最大頂点数を $OPT(G)$ とする．このとき，アルゴリズム ALG が任意の入力 G に対して $OPT(G)/ALG(G) \leq \sigma$ を満たすとき，ALG は σ 近似アルゴリズムである，または ALG の近似率は σ であるという．また，最適解でない頂点集合を $\overline{OPT(G)}$ とおき，最適解 $OPT(G)$ に対して，$\overline{OPT(G)} = V \setminus OPT(G)$, $|\overline{OPT(G)}| = n - OPT(G)$ として表す.

3. 立方体グラフ上の MaxD3IS の困難性

本節では，入力を立方体グラフに限定したとしても，MaxD3IS が $\mathcal{NP}$ 困難のままであることを示す．ここで，MaxD3IS の判定版である D3IS を考える．すなわち，無向グラフ G とある正整数 k が与えられたとき，D3IS は，グラフ G の中に k 頂点以上の距離 3 独立頂点集合が存在するか否かを判定する問題である．本節では，立方体グラフにおける D3IS が $\mathcal{NP}$ 完全であることを示すことにより，最大化問題である MaxD3IS の NP 困難性を示す．文献 [1] において，立方体グラフにおける MaxD2IS の $\mathcal{NP}$ 完全性が示されており，本問題からの多項式時間帰着関数を与えることにより示す．

定理 1 入力グラフを立体グラフ限定したとしても D3IS は $\mathcal{NP}$ 完全である．

証明. D3IS が $\mathcal{NP}$ に属すことは自明である．D3IS の $\mathcal{NP}$ 困難性を示すために，立方体グラフにおける D2IS からの多項式時間帰着を与える．すなわち，D2IS の入力グラフを $G = (V(G), E(G))$ とするとき，立方体グラフ $H = (V(H), E(H))$ への多項式時間帰着を以下で示す．

グラフ G の頂点集合および辺集合を，それぞれ $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ および $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ とする．この時，帰着グラフ $H = (V(H), E(H))$ は以下のように構成される．(i) グラフ G における各頂点 v_i に対応して，グラフ H における頂点 v^i を考える．(ii) グラフ G における各辺 e_p に対応するグラフ H の辺ガジェットを SG_p とする．辺ガジェット SG_p を図 2 に示す．辺ガジェット $SG_p = (V(SG_p), E(SG_p))$ は，v_0^p から v_7^p までの 8 頂点と重要な役割を果たす 2 頂点 $\{v_\alpha^p, v_\beta^p\}$ を持っている．すなわち，

$$V(SGk) = \{v_0^p, v_1^p, v_2^p, \ldots, v_7^p\} \cup \{v_\alpha^p, v_\beta^p\}$$

である．また図に示すよう辺集合 $E(SG_p)$ からなり，グラフ G における辺 (v_i, v_j) を SG_p で置き換える．帰着グラフ H は以上から構成され，

$$V(H) = \{v^1, v^2, \ldots, v^n\} \cup V(SG_1) \cup \cdots \cup V(SG_m)$$

の頂点から誘導されるグラフである．G が n 頂点，m 辺を持つとき，H は $(n + 10m)$ 頂点，$15m$ 辺を持つ．

帰着は以上であり，この帰着は多項式時間で可能である．以下では，上記した帰着方法により得られる帰着グラフ H に対して，元のグラフ G が $|I_2| \geq k$ であるような距離 2 の独立集合 I_2 を持つ時，かつその時に限り，H が $|I_3| \geq k + 2m$ であるような距離 3 の独立集合 I_3 を持つことを示す．

ここで, 各辺ガジェット SG_p において, 頂点 v_0^p および v_1^p を除く頂点では，頂点間の距離が 3 である頂点は $\{v_\alpha^p, v_\beta^p\}$ のみであることに注意する．例えば，$v_4^p \in I_3$ とした場合，任意の頂点 $u \in V(SG_p)$ について $dist_{SG_p}(v_4^p, u) \leq 2$ となる．$\{v_\alpha^p, v_\beta^p\}$ を除く他の頂点についても距離が 2 以下であることは容易に確かめることができる．また，頂点 v_0^p または v_1^p を選択したときには，任意の頂点 $u \in V(SG_p)$ について $dist_{SG_p}(v_4^p, u) \geq 3$ となる頂点は高々 1 頂点しか選択できないことが図 2 より言える．ここで，頂点 v_0^p または v_1^p を選択したときには，辺ガジェット SG_p に隣接する 2 頂点 v^i および v^j については $v^i \notin I_3$ および $v^j \notin I_3$ となることに注意して欲しい．

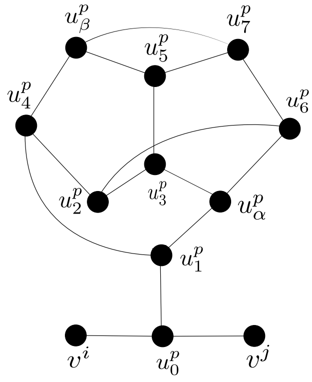

図 1 辺ガジェット SG_p

D2IS のインスタンス G が距離 2 独立頂点集合 $I_2 = \{v_{1^*}, v_{2^*}, \cdots v_{k^*}\}$ を持つと仮定する．ただし，$\{1^*, 2^*, \cdots, k^*\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ である．このとき，$|S'| = k$ および $|S''| = 2m$ であるような頂点部分集合 $S' = \{u_{1^*}, u_{2^*}, \cdots, u_{k^*}\}$ および $S" = \{\{v_\alpha^1, v_\beta^1\}, \{v_\alpha^2, v_\beta^2\}, \ldots, \{v_\alpha^m, v_\beta^m\}\}$ を選ぶ．S' の任意の 2 頂点間の距離は少なくとも 4 であり，すべての p について S'' 内の各 2 頂点 $\{v_\alpha^p, v_\beta^p\}$ と S' 内のすべての頂点との距離は少なくとも 3 であるので，$I_3 = S' \cup S''$ は G の距離 3 独立頂点集合となっていることがわかる．

逆に，グラフ G が $|S| \geq k + 2m$ となるような距離 3 独立頂点集合 S を持っていると仮定する．まず，各辺ガジェット SG_k において距離 3 独立頂点集合は 2 頂点しかとれない．よって，各辺ガジェットのより得られる距離 3 独立頂点集合は高々 $2m$ にしかならない．よって，$|I_2 \cap S'| \geq k$ となる．このとき，それらの k 個の頂点に相当する G の k 個の頂点集合 $\{v_{1^*}, v_{2^*}, \cdots, v_{k^*}\}$ 内の任意の 2 頂点間距離は少なくとも 2 となっている．すなわち，G は $|I_2| \geq k$ となるような距離 2 独立頂点集合 I_2 を持つことがわかる．以上より，入力を立方体グラフに限定したとしても D3IS が NP 完全となることを示すことができた． □

4. 近似アルゴリズム

本節では，はじめに最大次数を限定したグラフにおける MaxD2IS の近似アルゴリズムを用いて，MaxD3IS の近似

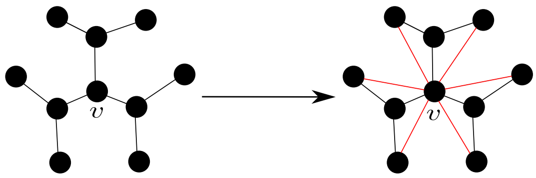

図 2　立方体グラフ G および 2 乗べキグラフ G^2

アルゴリズムを示す．さらに，新たに近似アルゴリズムを設計し近似率を示す．

4.1　上界

まずはじめに，立方体グラフにおける MaxD3IS の上界を示す．

定理 2　立方体グラフ $G = (V, E)$ において頂点数 $|V| = n$ とする時，MaxD3IS の上界は $|OPT(G)| \leq \frac{n}{4}$ となる．

証明グラフ $G = (V, E)$ における最適解を $OPT(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{|OPT(G)|}\}$ とする．最適解 $OPT(G)$ に含まれる頂点 v_i に対して，隣接する 3 頂点を $u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3}$ とする時，これら 3 頂点は $\overline{OPT(G)}$ に含まれる．従って，

$$|\overline{OPT(G)}| \geq 3|OPT(G)|.$$

となる．頂点集合 V の頂点数 n，最適解が $OPT(G)$ であることより $|\overline{OPT(G)}| = n - |OPT(G)|$ とおくことができるので，

$$|OPT(G)| \leq \frac{n}{4}$$

が成り立つ． □

4.2　2.4-近似アルゴリズム

ここでは，MaxD2IS に対する近似アルゴリズムを用いて，MaxD3IS の近似アルゴリズムを示す．

ここで，立方体グラフ G の 2 乗べキグラフ G^2 は図のように最大次数が 9 となる．

事実 1 ([3])　MaxD2IS に対して近似率 $\frac{\Delta+3}{5}$ の多項式時間近似アルゴリズムが設計できる

定理 3　立方体グラフにおいて，MaxD3IS の 2.4-近似アルゴリズが設計できる．

証明.

以下に 2.4-近似アルゴリズム POWER を示す．

アルゴリズム POWER
入力：　無向グラフ G
出力：　距離 3 独立頂点集合 I_3

1. G の 2 乗べキグラフ G^2 を求める．
2. 最大次数 9 のグラフにおける MaxD2IS に対する近似アルゴリズムを呼び出す．出力解を I_3 とする．
3. I_3 を出力する．

事実 1 より，最大次数 9 の 2 乗べキグラフ G^2 において，MaxD2IS に対する近似アルゴリズムの近似率は $(9+3)/5 = 2.4$ となる．すなわち，立方体グラフにおける MaxD3IS に対して 2.4-近似アルゴリズムが設計できる．

次に，上記のアルゴリズム Power についての近似率の正当性を示す．まず，グラフ G における MaxD3IS の最適解を $OPT_3(G)$，近似解を $ALG_3(G)$ とする．また，グラフ G の 2 乗べキグラフ G^2 における MaxD2IS の最適解を $OPT_2(G^2)$，近似解を $ALG_2(G^2)$ とする．

ここで，事実 1 より，立方体グラフ G に対して 2 乗べキグラフ G^2 において，最大次数 Δ は 9 となるので，の MaxD2IS に対する近似アルゴリズムの近似率は $(9+3)/5 = 2.4$ となる．よって，2,4 近似アルゴリズムによる解を $\mathtt{ALG}_1$ とする．さらに，同じ近似アルゴリズムにより D3IS を解くので，$ALG_3(G) = \mathtt{POWER}$ とおける．よって，

$$\frac{OPT_3(G)}{ALG_3(G)} \leq \frac{OPT_2(G^2)}{ALG_2(G^2)} = \frac{OPT_2(G^2)}{\mathtt{POWER}} \leq 2.4 \qquad (1)$$

さらに，同じ近似アルゴリズムにより MaxD2IS を解くので，$ALG_3(G) = \mathtt{POWER}$ とおけるので，

$$\frac{OPT_3(G)}{\mathtt{POWER}} \leq \frac{OPT_2(G^2)}{\mathtt{POWER}}$$

ここで，$OPT_3(G) > OPT_2(G^2)$ であると仮定する．この時，グラフ G における MaxD3IS の解でありグラフ G^2 における MaxD2IS の解でない頂点を v_i とする．頂点 v_i は G において他の頂点 u と距離は $dist_G(u, v) \geq 3$ である時，この時，2 乗べキグラフ G^2 における $dist^*_G(u, v) \geq 2$ であるため頂点 v_i は，MaxD2IS となるため，MaxD3IS の解となるとなる頂点は全て MaxD2IS の頂点となるため，$OPT_2(G^2)$ は少なくとも $OPT_3(G)$ より多くなるため，矛盾する．よって式 (1) を満たすため，アルゴリズム POWER の近似率は 2.4 以下となる． □

4.3　2-近似アルゴリズム

本節では，近似率 2.4 の改善として，2-近似アルゴリズムを設計する．はじめに，入力グラフ $G = (V, E)$ において，頂点 s および頂点集合 S に対して，距離 i 離れている頂点集合をそれぞれ $D_i(s)$ および $D_i(S)$ とする．

定理 4　立方体グラフにおいて，MaxD3IS の 2-近似アル

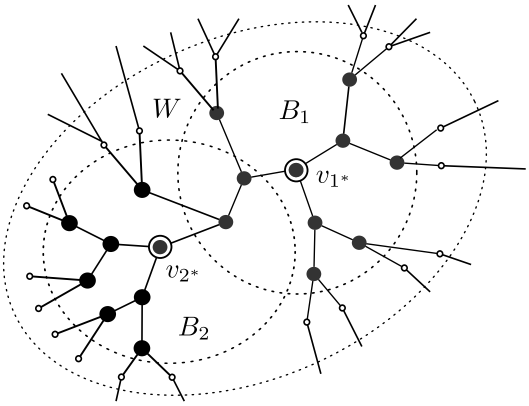

図 3　グラフ G における B_1，B_2 および W

ゴリズが設計できる．

以下に近似アルゴリズム DIS3 を示す．

> **アルゴリズム** DIS3
> **入力．**　無向グラフ G
> **出力．**　距離 3 独立頂点集合 I_3
> **0.**　集合 $I_3 = \phi$ とする．
> **1.**　任意の頂点 s を選択する．$I_3 = I_3 \cup \{s\}$, $B = \{s\} \cup D_1(s) \cup D_2(s), V = V - B, W = D_1(B) - B$ とおく．
> **2.**　W の頂点の中で，$|(D_1(v) \cup D_2(v)) - B|$ の値が最も小さくなるような頂点 v を選択し，$I_3 = I_3 \cup \{v\}, B = B \cup (\{v\} \cup D_1(v) \cup D_2(v)), V = V - B, W = D_1(B) - B$ と更新する．$V = \phi$ となるまでステップ 2 を繰り返す．
> **3.**　I_3 を出力．

DIS3 の近似率について以下の補題が成り立つ．

補題 1　立方体グラフを入力グラフとする時，DIS3 の近似率は $2 + O(1/n)$ 以下である．

証明． 立方体グラフ G において，はじめに 1 頂点 v_{1^*} を選択し，距離が 1 および 2 までの部分グラフを B_1 とし，B_1 の頂点数を $|B_1|$ する．この時，$|B_1|$ は頂点 v_{1^*} と距離 2 以下の 9 頂点の高々計 10 頂点であることが図 3 よりわかる．次に，$D(B_1)$ に対して距離が 1 から 4 までの部分頂点集合 $B_2 \subset (G - B_1)$ とし，B_2 より 1 頂点 v_{2^*} が選択できる．この時，定義より $dist_G(v_{1^*}, v_{2^*}) \geq 3$ であるので，少なくとも v_{1^*} と v_{2^*} の間には 2 頂点が含まれる．それら 2 頂点は B_1 に含まれるので，B_2 はの頂点は B_1 を除く高々 8 頂点となる．v_3* 以降においても同様に高々 8 頂点より 1 頂点を選択し続けることになる．以上より，近似アルゴリズムにおいて，k 回目における部分頂点集合 B_k とする時 $|B_1| + |B_2| + \cdots + |B_k| = 10 + 8(k-1)$ となることが分かる．終了条件より，最後の i 番目まで頂点 v_{i^*} を選択した時，$10 + 8(i-1)$ が入力グラフの頂点数 n を超えるため，

$$\begin{aligned} 10 + 8(i-1) &\geq n \\ i &\geq \frac{n-2}{8} \end{aligned}$$

となり，近似解 $ALG(G) \geq (n-2)/8$ となる．さらに，MaxD3IS の上界は $OPT \leq n/4$ であるため，

$$\frac{OPT(G)}{ALG(G)} \leq \frac{\frac{n}{4}}{\frac{n-2}{8}} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

となる．よって，この近似アルゴリズムの近似率は $2 + O(1/n)$ となる．　□

さらに，以下の補題を示す．

補題 2　立方体グラフを入力グラフとする時，DIS3 の近似率は 2 以下である．

証明． ここでは，最後の i 番目における B_i について議論を行う．アルゴリズムにおいて最後の i 番目とする時，$i-1$ 番目までの頂点数は $|B_1| + |B_2| + \cdots + |B_{i-1}| = 10 + 8(i-2)$ である．

B_i の頂点数が 8 である時，B_i より 2 頂点が選択できる．この時，i は最終フェイズではなく $i+1$ 番目が最終フェイズとなり，最終ファイズでは 8 頂点より少ない頂点より I_3 を選択することとなる．

B_i の頂点が 7 である時，入力グラフが立方体グラフであるため，$i-1$ 番目までに少なくとも頂点数が奇数の $|B_k|$ を含むため，$|B_1| + |B_2| + \cdots + |B_{i-1}| = 10 + 8(i-2) - 1$ となる．よって $|B_1| + |B_2| + \cdots + |B_i| = 10 + 8(i-2) - 1 + 7 = 8i$ となる．
また，B_i の頂点が 6 である時，$|B_1| + |B_2| + \cdots + |B_i| = 10 + 8(i-2) + 6 = 8i$ となる．よって，この近似アルゴリズムにおいて $8i$ がグラフの頂点数 n を超えるまで繰り返すため，

$$\begin{aligned} 8i &\geq n \\ i &\geq \frac{n}{8} \end{aligned}$$

となり，近似率は，

$$\frac{OPT(G)}{ALG(G)} \leq \frac{\frac{n}{4}}{\frac{n}{8}} = 2$$

となり，アルゴリズム DIS3 の近似率は 2 以下である．　□

以上より定理 4 が成り立つ．

謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金 26330017 および 15J05484 による．

参考文献

[1] P. Alimonti, V. Kann. Hardness of Approximating Problems on Cubic Graphs. Journal Theoretical Computer. Volume 237 Issue 1–2, April 28, Science. pp.123–134 , 2000.

[2] G. Agnarsson, P. Damaschke, M.H. Halldo'rsson. Powers of geometric intersection graphs and dispersion algorithms. *Discrete Applied Mathematics*, 132, pp.3–16, 2004.

[3] P. Berman and T. Fujito, On approximation properties of the independent set for low degree graphs, Theory Computing Systems 32(2), pp.115-132, 1999.

[4] A. Brandstädt and V. Giakoumakis. Maximum weight independent sets in hole- and co-chair-free graphs. *Information Processing Letters* **112**, pp.67–71, 2012

[5] Eto H, Guo F and Miyano E, Distance-d independent set problems for bipartite and chordal graphs. In: Lin G (ed) Proceedings of COCOA 2012. Springer, New York, pp.234–244,2012

[6] F. Gavril. Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of chordal graph. *SIAM J. Comput.* **1**, pp.180–187,1972

[7] F. Gavril. Algorithms on circular-arc graphs. *Networks* **4**, pp.357–369, 1974

[8] M.R. Garey, D.S. Johnson, and L. Stockmeyer. Some simplified $\mathcal{NP}$-complete graph problems. *Theoretical Computer Science*, **1**, pp.237–267, 1976

[9] M.R. Garey and D.A. Johnson. *Computers and intractability - A guide to the theory of* $\mathcal{NP}$*-completeness* ,1979

[10] M.C. Golumbic. The complexity of comparability graph recognition and coloring. *Computing* **18**, pp.199–208, 1977

[11] F. Harary. *Graph Theory.* Addison-Wesley, 1969

[12] J. Håstad. Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$. *Acta Mathematics*, 182 (1), pp.105–142, 1999.

[13] V.V. Lozin and M. Milanič. A polynomial algorithm to find an independent set of maximum weight in a fork-free graph. *J. Discrete Algorithms* **6**, pp.595–604, 2008

[14] G.J. Minty. On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs. *J. Combin. Theory Ser.B* **28**, pp.284–304, 1980

[15] O.J. Murphy. Computing independent sets in graphs with large girth. *Discrete Applied Mathematics* **35**, pp.167–170, 1992

[16] S. Poljak. A note on stable sets and coloring of graphs. *Comment. Math. Univ.* Carolin. 15 pp.307–309, 1974

