

# 線形方程式を解くための MrR (ミスター R) 法について

阿部 邦美<sup>1,a)</sup> 藤野 清次<sup>2,b)</sup>

**概要:** 線形方程式を効率的に解くための Krylov 空間法について考える。われわれは、Rutishauser が ORTHODIR 法を安定化するために提案した交代漸化式を用いて新たな解法を提案する。ここで、提案する解法は、Conjugate Residual (CR) 法と同様、残差ベクトルと Krylov 部分空間との  $A$ -直交性を用いて導出される。その結果、提案する解法は、CR 法、Minimized Residual Method Based on the Three-Term Recurrence Formula of CG-Type (MRTR) 法と数学的に同値であるがアルゴリズムが異なるため、収束性の改善が期待できる。数値実験では対称行列を取り上げ、われわれの提案する解法が Conjugate Gradient (CG) 法および MRTR 法の収束性よりも優れていることを示す。

**キーワード:** 線形方程式, Krylov 空間法, 共役残差法, Rutishauser

## On MrR (mister R) Method for Solving Linear Equations

ABE KUNIYOSHI<sup>1,a)</sup> FUJINO SEIJI<sup>2,b)</sup>

**Abstract:** We treat of Krylov subspace method for efficiently solving linear equations, and propose a minimal residual method using coupled two-term recurrences, by which the residual vector and approximate solution are updated, formulated by Rutishauser. Coefficients of the residual polynomial are determined by imposing the  $A$ -orthogonality on the residual in our proposed variant as well as that in Conjugate Residual method. Our proposed method is mathematically equivalent to CR and the Minimized Residual method based on the Three-term Recurrence formula of CG-Type (MRTR method), but the implementations are different. Therefore the convergence behavior among our variant, CG and MRTR is supposed to be different. By numerical experiments on linear equations with symmetric matrices, we demonstrate that the residual norms of our implementation converge faster than those of CG and MRTR.

**Keywords:** linear equations, Krylov subspace methods, conjugate residual method, Rutishauser

### 1. はじめに

$n \times n$  の行列  $A$  を係数行列に持ち、 $n$  次ベクトル  $\mathbf{b}$  を右辺項とする線形方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1)$$

を効率的に解くことができる Krylov 空間法を扱う。係数行列が対称の場合、解法の基底は Lanczos orthogonalization

アルゴリズム [5] を用いて生成されるため、短い漸化式 (直前の 2 項) によって残差ベクトルと近似解が更新される。その代表が、Conjugate Gradient method (共役勾配法, CG 法) [10] や Conjugate Residual method (共役残差法, CR 法) [9] である。一方、係数行列が非対称の場合、解法の基底は Arnoldi orthogonalization アルゴリズム [2] を用いて生成されるため、長い漸化式 (すでに計算されたすべての項) によって残差ベクトルと近似解が更新される。その代表として、Generalized Conjugate Residual method (一般化共役残差法, GCR 法) [3], Generalized Minimal RESidual method (一般化最小残差法, GMRES 法) [7] などが知られている。CG 法は、残差ベクトルと Krylov 部

<sup>1</sup> 岐阜聖徳学園大学  
Gifu Shotoku University, Nakauzura, Gifu 500-8288, Japan

<sup>2</sup> 九州大学  
Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan

a) abe@gifu.shotoku.ac.jp

b) seiiji.fujino@gmail.com

分空間との直交性を課すことによって導出される。また CR 法の場合、残差ベクトルと Krylov 部分空間との  $A$ -直交性が使用される。数学的には、Krylov 部分空間上で残差ノルムを最小化することと同値である。さらに、GCR 法、GMRES 法も Krylov 部分空間上で残差ノルムを最小化することによって導出される。

さらに近年、CR 法と数学的に同値な Minimized Residual method based on the Three-term Recurrence formula of CG-type (CG 型の三項漸化式に基づく最小残差法、MRTR 法) [1] が提案されている。ただし、MRTR 法と CR 法のアルゴリズムは互いに異なる。すなわち、MRTR 法の残差を生成するための漸化式は、CR 法、CG 法と同様、短い漸化式を用いるが、CR 法、CG 法の漸化式とは異なり、Lanczos 多項式に異なるパラメータを導入した漸化式を用いる。この漸化式は、Generalized Product-type method based on Bi-Conjugate Gradient method (一般化積型解法、GPBiCG 法) [12] の安定化多項式 [8] を満足する。また、MRTR 法の近似解は、CR 法と同じ Lanczos 多項式を満足する漸化式によって生成される。さらに、MRTR 法の残差多項式の係数は残差ノルムを最小化することによって決められる。すなわち、CR 法のように  $A$ -直交条件を利用していないため、CR 法と MRTR 法における係数の計算式は互いに異なる。

そこで、残差、近似解を更新するための漸化式を改良すること、および係数の計算方法を工夫することによって、新たな解法を提案する。すなわち、Rutishauser が ORTHODIR 法 [11] を安定化するために提案した漸化式 ([6]) を利用して新たな解法を導出する。ここで、CR 法と同様、 $A$ -直交条件を用いて係数の計算式を決める。われわれの提案するアルゴリズムは CR 法、MRTR 法と数学的に同値であるが、表現が異なる。数値実験では対称行列を取り上げ、われわれの提案する解法が CG 法、MRTR 法の収束性よりも優れていることを示す。

本論文の 2 節では、われわれの提案する解法と数学的に同値な CR 法、および対称行列のための代表的な Krylov 空間法である CG 法の概略を述べる。次に、3 節では、Rutishauser が提案した漸化式と、CR 法と数学的に同値な条件を用いて、新たな解法を提案する。さらに、われわれの提案する解法と MRTR 法との相違点を述べる。4 節では、対称行列を係数にもつ線形方程式を CG 法、MRTR 法、われわれが提案する解法によって解き、それらの収束性を比較する。最後に、5 節でまとめを行う。

## 2. CR 法と CG 法

本節では、対称行列を係数にもつ線形方程式 (1) に適用可能な CR 法と CG 法の概略を説明する。

CR 法の残差ベクトル  $\mathbf{r}_k^{\text{cr}}$  は Lanczos orthogonalization アルゴリズム [10] によって生成されるため、残差ベクトル

$\mathbf{r}_k^{\text{cr}}$  は

$$\mathbf{r}_k^{\text{cr}} \equiv R_k(A)\mathbf{r}_0 \quad (2)$$

と表され、その残差多項式  $R_k(A)$  は CR 法の二つのパラメータ  $\alpha_k, \beta_k$  から定められる Lanczos 多項式 [10] と呼ばれる次の三項漸化式を満足する。ただし、初期残差  $\mathbf{r}_0$  は任意のベクトル  $\mathbf{x}_0$  を与えて  $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$  によって定義される。

$$\begin{aligned} R_0(\lambda) &= 1, \quad R_1(\lambda) = 1 - \alpha_0\lambda, \\ R_{k+1}(\lambda) &= \left(1 - \alpha_k \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}} - \alpha_k\lambda\right) R_k(\lambda) \\ &\quad + \alpha_k \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}} R_{k-1}(\lambda). \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3)$$

また、残差ベクトル  $\mathbf{r}_k^{\text{cr}}$  を更新するため、補助ベクトル  $\mathbf{p}_k^{\text{cr}}$  を導入し、ある多項式  $\bar{G}_k(\lambda)$  によって次のように表す。

$$\mathbf{p}_k^{\text{cr}} \equiv \bar{G}_k(A)\mathbf{r}_0.$$

このとき、2 つの多項式  $R_k(\lambda), \bar{G}_k(\lambda)$  は次の交代漸化式を満たす。

$$\bar{G}_k(\lambda) = R_k(\lambda) + \beta_{k-1}\bar{G}_{k-1}(\lambda), \quad (4)$$

$$R_{k+1}(\lambda) = R_k(\lambda) - \alpha_k\lambda\bar{G}_k(\lambda). \quad (5)$$

次に、CR 法の多項式係数  $\alpha_k, \beta_k$  について述べる。ベクトル  $\mathbf{p}_k^{\text{cr}}$  は Krylov 部分空間  $K_k(A, \mathbf{r}_0)$  の基底であり、AA-Lanczos orthogonalization アルゴリズム [5] によって生成されるので、次のような直交性を満たす。

$$(A\mathbf{p}_i^{\text{cr}}, A\mathbf{p}_j^{\text{cr}}) = 0 \quad (i \neq j). \quad (6)$$

式 (6) と数学的帰納法を用いることによって、次の直交性を示すことができる。

$$(\mathbf{r}_k^{\text{cr}}, A\mathbf{p}_i^{\text{cr}}) = 0 \quad (i < k). \quad (7)$$

さらに、式 (6), (7) を用いて

$$(\mathbf{r}_k^{\text{cr}}, A\mathbf{r}_i^{\text{cr}}) = 0 \quad (i < k) \quad (8)$$

を得る。これらの性質 (6) – (8) を用いて、係数  $\alpha_k, \beta_k$  は次の計算式で表される。

$$\alpha_k = \frac{(A\mathbf{r}_k^{\text{cr}}, \mathbf{r}_k^{\text{cr}})}{(A\mathbf{p}_k^{\text{cr}}, A\mathbf{p}_k^{\text{cr}})}, \quad \beta_k = \frac{(A\mathbf{r}_{k+1}^{\text{cr}}, \mathbf{r}_{k+1}^{\text{cr}})}{(A\mathbf{r}_k^{\text{cr}}, \mathbf{r}_k^{\text{cr}})}.$$

CG 法の残差ベクトル  $\mathbf{r}_k^{\text{cg}}$  は、補助ベクトル  $\mathbf{p}_k^{\text{cg}}$  とともに、CR 法と同じ交代漸化式 (4), (5) によって更新される。また、CG 法によって生成されるベクトル  $\mathbf{r}_k^{\text{cg}}$  は Krylov 部分空間  $K_k(A, \mathbf{r}_0)$  の基底であり、次のような直交性を満たす。

$$(\mathbf{r}_i^{\text{cg}}, \mathbf{r}_j^{\text{cg}}) = 0 \quad (i \neq j). \quad (9)$$

式 (6) と数学的帰納法を用いることによって、次の直交性

を示すことができる。

$$(\mathbf{p}_i^{\text{CG}}, A\mathbf{p}_j^{\text{CG}}) = 0 \quad (i \neq j). \quad (10)$$

これらの性質 (9), (10) を用いて, CG 法の係数  $\alpha_k, \beta_k$  は次のような計算式で表される。

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}_k^{\text{CG}}, \mathbf{r}_k^{\text{CG}})}{(\mathbf{p}_k^{\text{CG}}, A\mathbf{p}_k^{\text{CG}})}, \quad \beta_k = \frac{(\mathbf{r}_{k+1}^{\text{CG}}, \mathbf{r}_{k+1}^{\text{CG}})}{(\mathbf{r}_k^{\text{CG}}, \mathbf{r}_k^{\text{CG}})}.$$

### 3. ミスター R 法

本節では, Rutishauser が提案した交代漸化式 [6] を用いて CR 法 [9] と数学的に同値な解法を導出する. 提案するアルゴリズムは CR 法と表現が異なるため, 収束性が異なると推察できる。

Lanczos 多項式 (3) の係数を  $\zeta_k \equiv \alpha_k, \eta_k \equiv -\beta_{k-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}$  と置くと, 式 (3) は次の三項漸化式に書き換えられる ([4], [5], [12]).

$$\begin{aligned} P_0(\lambda) &= 1, \quad P_1(\lambda) = (1 - \zeta_0\lambda)P_0(\lambda), \\ P_{k+1}(\lambda) &= (1 + \eta_k - \zeta_k\lambda)P_k(\lambda) - \eta_k P_{k-1}(\lambda). \quad (11) \\ &(k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

われわれが提案する解法の残差ベクトル  $\mathbf{r}_k$  は

$$\mathbf{r}_k \equiv P_k(A)\mathbf{r}_0$$

と表される。

ここで,  $k+1$  次の補助多項式

$$G_{k+1}(\lambda) \equiv P_k(\lambda) - P_{k+1}(\lambda)$$

を導入すると, 式 (11) は次の交代漸化式 (12), (13) に書き換えられる. ORTHODIR 法 [11] は三項漸化式 (3) を用いて残差を生成するが, Rutishauser はこれを安定化するために交代漸化式 (12), (13) を提案した。

$$G_{k+1}(\lambda) = \zeta_k \lambda P_k(\lambda) + \eta_k G_k(\lambda), \quad (12)$$

$$P_{k+1}(\lambda) = P_k(\lambda) - G_{k+1}(\lambda). \quad (13)$$

なお, CR 法, CG 法の残差が満たす漸化式は

$$\tilde{G}_k(\lambda) = P_k(\lambda) + \eta_k \frac{\zeta_{k-1}}{\zeta_k} \tilde{G}_{k-1}(\lambda), \quad (14)$$

$$P_{k+1}(\lambda) = P_k(\lambda) - \zeta_k \lambda \tilde{G}_k(\lambda) \quad (15)$$

と書ける. また, GPBi-CG 法 [12] で使用される安定化多項式 [8] は, 交代漸化式

$$\hat{G}_k(\lambda) = \zeta_k P_k(\lambda) + \eta_k \hat{G}_{k-1}(\lambda), \quad (16)$$

$$P_{k+1}(\lambda) = P_k(\lambda) - \lambda \hat{G}_k(\lambda) \quad (17)$$

である. すなわち, 式 (12)–(17) における補助多項式  $G_k(\lambda), \tilde{G}_k(\lambda), \hat{G}_k(\lambda)$  の関係は,  $G_{k+1}(\lambda) = \lambda \hat{G}_k(\lambda), \hat{G}_k(\lambda) = \zeta_k \tilde{G}_k(\lambda)$  である。

ここで補助ベクトル

$$\mathbf{y}_k \equiv G_k(A)\mathbf{r}_0 \quad (18)$$

を導入すれば, 式 (12), (13) より, 次のような残差を更新する漸化式が得られる。

$$\mathbf{y}_{k+1} = \zeta_k A\mathbf{r}_k + \eta_k \mathbf{y}_k, \quad \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \mathbf{y}_{k+1}. \quad (19)$$

さらに, 残差  $\mathbf{r}_k \equiv \mathbf{b} - A\mathbf{x}_k$  と同様, ベクトル  $\mathbf{y}_k$  を  $\mathbf{y}_k = -A\mathbf{z}_k$  と定義すれば, 式 (19) から近似解に関する漸化式

$$\mathbf{z}_{k+1} = -\zeta_k \mathbf{r}_k + \eta_k \mathbf{z}_k, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{z}_{k+1}$$

が得られる。

次に, 係数  $\zeta_k, \eta_k$  は, 残差ノルムを最小化して決める. すなわち,

$$\arg \min_{\zeta, \eta} \|\mathbf{r}_k - \zeta_k A\mathbf{r}_k - \eta_k \mathbf{y}_k\|_2. \quad (20)$$

ここで次の同値性を用いる。

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= \arg \min_{\alpha, \beta} \|\mathbf{x} - \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}\|_2 \\ &\iff \mathbf{x} - \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}. \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{r}_k, \mathbf{a} = A\mathbf{r}_k, \mathbf{b} = \mathbf{y}_k$  とみれば, 式 (20) は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{r}_k - \zeta_k A\mathbf{r}_k - \eta_k \mathbf{y}_k \perp A\mathbf{r}_k, \mathbf{y}_k. \quad (21)$$

ここで,

$$\tilde{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}_k - \gamma_1 \mathbf{y}_k, \quad \tilde{\mathbf{s}} \equiv A\mathbf{r}_k - \gamma_2 \mathbf{y}_k$$

とおくとき, 残差ベクトルは  $\mathbf{r}_{k+1} = \tilde{\mathbf{r}} - \zeta_k \tilde{\mathbf{s}}$  と書ける. ただし,  $\eta_k = \gamma_1 - \zeta_k \gamma_2$  である。

まず, 式 (21) より  $\tilde{\mathbf{r}} \perp \mathbf{y}_k, \tilde{\mathbf{s}} \perp \mathbf{y}_k$  を課す. すると, それぞれの条件から

$$\gamma_1 \equiv \frac{(\mathbf{y}_k, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)}, \quad \gamma_2 \equiv \frac{(\mathbf{y}_k, A\mathbf{r}_k)}{(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)}$$

を得る. 次に, 式 (21) より  $\tilde{\mathbf{r}} - \zeta_k \tilde{\mathbf{s}} \perp \tilde{\mathbf{s}}$  を課す. したがって,

$$\zeta_k = \frac{(\tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{r}})}{(\tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{s}})}.$$

提案するアルゴリズムで生成されるベクトル列  $\mathbf{r}_k, \mathbf{y}_k$  は, 次の直交性を満たす。

$$(\mathbf{r}_{k+1}, A\mathbf{r}_k) = (\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{y}_k) = 0. \quad (22)$$

式 (22) から

$$(\mathbf{r}_k, \mathbf{y}_k) = (\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{y}_k) = 0 \quad (23)$$

が成り立つ. これらの直交性 (22), (23) は, MRTR 法と同じ性質である。

提案する解法を、Rutishauser によって提案された交代漸化式を利用する最小化に基づく解法 (Minimal residual method using the coupled two-term recurrence formulated by Rutishauser) と名付け、MrR (ミスター R) と略す。得られたアルゴリズムの表現は CR 法や MRTR 法と異なるが、数学的に同値である。

残差の最小化を条件としているため非対称行列に適用することができるが、残差  $\mathbf{r}_{k+1}$  と  $A\mathbf{r}_k$  との直交性、および短い漸化式を利用していることから、CR 法と同様、対称行列のための解法と言える。

以上、MrR 法のアルゴリズムは次のようにまとめられる。

#### MrR アルゴリズム

Let  $\mathbf{x}_0$  be an initial guess, and put  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ .

set  $\mathbf{y}_0 = -\mathbf{r}_0$   $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ .

For  $k = 0, 1, \dots$

$$\mu = (\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k), \nu = (\mathbf{y}_k, A\mathbf{r}_k), \omega = (\mathbf{y}_k, \mathbf{r}_k)$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega}{\mu}, \quad \gamma_2 = \frac{\nu}{\mu}$$

$$(\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0 \text{ if } k = 0)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_k - \gamma_1 \mathbf{y}_k, \quad \mathbf{s}' = A\mathbf{r}_k - \gamma_2 \mathbf{y}_k$$

$$\zeta_k = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{s}')}{(\mathbf{s}', \mathbf{s}'), \quad \eta_k = \gamma_1 - \zeta_k \gamma_2$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \eta_k \mathbf{y}_k + \zeta_k A\mathbf{r}_k, \quad \mathbf{z}_{k+1} = \eta_k \mathbf{z}_k - \zeta_k \mathbf{r}_k$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \mathbf{y}_{k+1}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{z}_{k+1}$$

end

ここで、われわれが提案する MrR 法と MRTR 法との相違点について述べる。

まず、MRTR 法における補助ベクトル  $\mathbf{y}_k$  は  $\mathbf{y}_k \equiv \zeta_{k-1} G_{k-1}(A)\mathbf{r}_0$  とおくため、MrR 法の補助ベクトル (18) とは異なる。しかし、MrR 法の残差を更新する漸化式は最終的に MRTR 法のそれと一致する。

つぎに、MRTR 法における近似解を更新する漸化式は、式 (14) から得られたものであるが、MrR 法では式 (12) から得られたものである。

さらに、MRTR 法のパラメータ  $\zeta_k$ ,  $\eta_k$  の計算式は、残差を最小化することによって得られた

$$\zeta_k = \frac{\zeta_{k-1}(\mathbf{r}_{k-1}, A\mathbf{r}_{k-1})(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{\zeta_{k-1}(A\mathbf{r}_k, A\mathbf{r}_k)(\mathbf{r}_{k-1}, A\mathbf{r}_{k-1}) - (\mathbf{y}_k, A\mathbf{r}_k)(A\mathbf{r}_k, \mathbf{y}_k)},$$

$$\eta_k = \frac{-(\mathbf{y}_k, A\mathbf{r}_k)(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{\zeta_{k-1}(A\mathbf{r}_k, A\mathbf{r}_k)(\mathbf{r}_{k-1}, A\mathbf{r}_{k-1}) - (\mathbf{y}_k, A\mathbf{r}_k)(A\mathbf{r}_k, \mathbf{y}_k)}$$

であるのに対し、MrR 法のパラメータ  $\zeta_k$ ,  $\eta_k$  の計算式は、残差ベクトルと Krylo 部分空間との  $A$ -直交性を課すことによって決まるため、それらの計算式は互いに異なる。

MrR 法は、MRTR 法と上記の 3 点で異なるため、それらの収束性は異なると推測できる。

## 4. 数値実験

本節では、実対称行列を係数に持つ線形方程式を用いた

表 1 係数行列の特徴

Table 1 Characteristic of coefficient matrices

| Matrix         | N       | NNZ        | Ave. NNZ |
|----------------|---------|------------|----------|
| bcsstk17       | 10,974  | 219,812    | 20.03    |
| ela-pla-9-1000 | 28,291  | 3315,555   | 117.19   |
| msc10848       | 10,848  | 620,313    | 57.18    |
| N112K          | 341,055 | 1,1643,693 | 34.14    |
| pwtk           | 217,918 | 5,926,171  | 27.19    |

数値実験を通して CG 法, MRTR 法, MrR 法の収束性を比較する。

数値実験は、CX400 (CPU は Intel Xeon E5-2690, クロック周波数は 2.7GHz, メモリは 128GB) において Fujitsu Technical Computing Suite v1.0 (コンパイルオプションは “-O3”) の倍精度浮動小数点演算によって実行された。また、収束判定条件は相対残差ノルム  $\|\mathbf{r}_k\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq 10^{-12}$  を採用した。

共同研究で提供された、または Florida 大学のデータベースなどに掲載されている 5 種類の実対称行列 bcsstk17, ela-pla-9-1000, msc10848, N112K, pwtk を取り上げる。これらの行列は構造解析問題から得られたもので、表 1 に述べられた特徴を持つ。ただし、表 1 における N は係数行列の次元、NNZ は非零要素数、Ave. NNZ は一行当たりの平均非零要素数を示す。表 1 に述べられた行列を係数に持つ線形方程式を従来の CG 法, MRTR 法, われわれが提案した MrR 法によって解く。初期近似解ベクトルは  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  を採用した。

収束するまでに各解法が要した反復回数 (Iterations), 計算時間 (Time (second)), および収束した時点の真の相対残差ノルム  $\log_{10}(\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k\|_2 / \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0\|_2)$  (True res.) を表 2 に示す。

表 2 から次のようなことを述べるができる。CG 法, MRTR 法, MrR の反復回数, 計算時間を比較するとき、MrR 法の反復回数は CG 法の最大 72%, 計算時間は最大 72% に、また MRTR 法の最大 78%, 計算時間は最大 79% に減少した。また、MrR 法が CG 法や MRTR 法の反復回数、または計算時間の点で優っていたのは bcsstk17, ela-pla-9-1000, N112K, pwtk の 4 つの問題に対してであり、msc10848 では MRTR 法の反復回数, 計算時間とはほぼ同程度であった。以上、われわれが提案した MrR 法の収束性は、従来の CG 法, MRTR 法の収束性よりも優れていると言える。

## 5. まとめ

われわれは、Rutishauser が ORTHODIR 法を安定化するために提案した交代漸化式を用いて新たな解法を導出した。ただし、CR 法と同様、 $A$ -直交条件を用いてパラメータの計算式を決めた。すなわち、われわれの提案するアル

表 2 各解法の反復回数, 計算時間, 真の相対残差ノルム (上から順に bcsstk17, ela-pla-9-1000, msc10848, N112K, pwtk)

**Table 2** Number of iterations, computation time and explicitly computed relative residual norm ( displayed in order of bcsstk17, ela-pla-9-1000, msc10848, N112K, pwtk)

| bcsstk17       | Iterations | Time   | True res. |
|----------------|------------|--------|-----------|
| CG             | 3154       | 1.819  | -12.0     |
| MRTR           | 3067       | 1.739  | -12.0     |
| MrR            | 3067       | 1.727  | -12.0     |
| ela-pla-9-1000 | Iterations | Time   | True res. |
| CG             | 12297      | 106.27 | -11.7     |
| MRTR           | 13002      | 105.60 | -11.6     |
| MrR            | 11118      | 90.46  | -11.3     |
| msc10848       | Iterations | Time   | True res. |
| CG             | 5640       | 8.67   | -12.0     |
| MRTR           | 5474       | 7.52   | -12.0     |
| MrR            | 5475       | 7.63   | -12.0     |
| N112K          | Iterations | Time   | True res. |
| CG             | 26521      | 799.57 | -6.7      |
| MRTR           | 26808      | 785.91 | -6.6      |
| MrR            | 21034      | 622.20 | -6.8      |
| pwtk           | Iterations | Time   | True res. |
| CG             | 52852      | 808.51 | -12.0     |
| MRTR           | 40322      | 608.11 | -12.0     |
| MrR            | 38001      | 579.74 | -12.0     |

ゴリズムは CR 法, MRTR 法と数学的に同値であるが, 表現が異なる. 数値実験では対称行列を取り上げ, われわれの提案する MrR 法が CG 法および MRTR 法よりも優れていることを示した.

**謝辞** 数値実験に協力頂いた九州大学大学院システム情報学府 2 年の岩里洸介氏に感謝する. また, 本研究の一部は, JSPS 科研費 26390136 の助成を受けたものである.

参考文献

[1] 阿部邦美, 張紹良, 三井斌友: MRTR 法: CG 型の三項漸化式に基づく非対称行列のための反復解法, 日本応用数理学会論文誌, vol. 7, pp.37-50, 1997.

[2] Arnoldi, W. E.: The Principle of Minimized Iteration in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem, Quart. Appl. Math., vol. 9, pp.17-29, 1951.

[3] Eisenstat, S. C., Elman, H. C., Schultz, M. H.: Variational Iterative Methods for Nonsymmetric Systems of Linear Equations, SIAM J. Numer. Anal., vol. 20, pp.345-357, 1983.

[4] Gutknecht, M. H.: Variants of BiCGStab for Matrices with Complex Spectrum, SIAM J. Sci. Comput., vol. 14, pp.1020-1033, 1993.

[5] Lanczos, C.: Solution of Systems of Linear Equations by Minimized Iterations, J. Res. Nat. Bur. Standards, vol. 49, pp.33-53, 1952.

[6] Rutishauser H.: Theory of Gradient Method, in *Refined Iterative Methods for Computation of the Solution and the Eigenvalues of Self-Adjoint Value Problems*, Mitt. Inst. angew. Math. ETH Zürich, Nr. 8, Birkhäuser,

Basel, pp.24-49, 1959.

[7] Saad, Y. and Schultz, M. H.: GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems, SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 7, pp.856-869, 1986.

[8] Sleijpen, G. L. G., Sonneveld, P. and van Gijzen, M. B.: Bi-CGSTAB as Induced Dimension Reduction Method, Applied Numerical Math., vol. 60, pp.1100-1114, 2010.

[9] Stiefel, E. L.: Relaxationsmethoden bester strategie zur losung linearer gleichungssysteme, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 29, pp.157-179, 1955.

[10] Stiefel, E. L.: Kernel Polynomial in Linear Algebra and their Numerical Applications, in: Further contributions to the determination of eigenvalues, NBS Applied Math. Ser., vol. 49, pp.1-22, 1958.

[11] Young, D. M. and Jea, K. C.: Generalized Conjugate Gradient Acceleration of Nonsymmetrizable Iterative Methods, Linear Algebra and Its Applications, vol. 34, pp.159-194, 1980.

[12] Zhang, S.- L.: GPBi-CG: Generalized Product-type Methods Based on Bi-CG for Solving Nonsymmetric Linear Systems, SIAM J. Sci. Comp., vol. 18, pp.537-551, 1997.