単貧民における必勝戦略と必勝判定問題に関する考察

木谷 裕紀[1,a)]　小野 廣隆[2,b)]

概要：単貧民とは, カードゲーム大貧民を完全情報ゲームとして簡易化したものである. 本研究では札の種類を一般化した二人単貧民の勝者決定について考察する. 単貧民は二人完全情報性から, カードが配られた時点で先手後手のいずれかに必勝戦略が存在する. 本研究では札の種類数に着目したアルゴリズム決定を提案する. また, 先手後手の手札が同一のとき単貧民が先手必勝であることを示す.

Analysis of Winning Strategy for TANHINMIN

Kiya Hironori[1,a)]　Ono Hirotaka[2,b)]

Abstract: TANHINMIN is a game with perfect information, which is a simplified version of card game DAIHINMIN. In this paper, we consider a 2-player generalized TANHINMIN, where the size of deck is generalized. Due to the perfect information, 2-player TANHINMIN has a winning strategy of either the first player or the second player. We propose an algorithm of deciding the winner, which is parameterized with the numbers of cards. Furthermore, we show that if the cards of two players are exactly same, the winner is the first player.

1. はじめに

大貧民はトランプカードゲームの中でも全国的に認知度, 人気が高い遊びであり, 大富豪や階級闘争などとも呼ばれることがある. このゲームは不完全情報多人数ゲームであり, 一般には最適戦略が存在しない, あるいは求めることが困難である. 近年, 将棋やオセロなどの完全情報ゲームに関する研究と共に, 大貧民のような不完全情報ゲームの研究も進んでいる. 2006 年度から毎年コンピューター大貧民大会が電気通信大学で開催され,「強い」大貧民ＡＩの開発を競う場となっている. 2015 年, プロ棋士に対する勝利宣言がだされた将棋コンテスト同様, 日々コンピューター大貧民ＡＩの実力も向上しているがまだまだ成長の余地がある. このような大貧民研究の一環として西野が定義した大貧民を完全情報多人数ゲーム化した単貧民 [1] という亜種がある. この単貧民は完全情報ゲームであるため二人で行う場合先手, 後手のいずれかに必勝戦略が存在する. しかし二人で行う単貧民においてもその必勝戦略を見つけるために全域木探索を用いるとトランプといえども手札の種類は 3 の 52(joker を合わせると 54) 乗にもなりその計算量は現実的ではない. そこで本論文では大貧民を簡略したゲームである単貧民を題材として扱い, 2 人で単貧民を行うときのその最適戦略, 必勝判定問題に関する考察を行う.

2. 準備

本節では単貧民に関する定義を行う. 西野の定義した単貧民は大貧民のルールに以下の制限を課したゲームを指す.

- 特殊ルールが一切存在しない.
- 1 枚出しのみを認める.
- 手札は公開で行われる.

これを基に二人単貧民を以下のように定義する. プレイヤーA，Bの二人で行う. 各プレイヤーに強さ 1〜n の札を配る. それぞれの札の枚数は任意で必ずしも二人のプレイヤーの札の枚数は同一枚数でなくともよい. 先手後手を決め, 先手プレイヤーから場に札を出していく. 場にある札

[1] 九州大学経済学部経済工学科
Department of Ecnomic Engineering, School of Economics,Kyushu University
[2] 九州大学大学院経済学研究院
Department of Ecnomic Engineering, School of Faculty of Economics,Kyushu University
[a)] msc17.lvr93@gmail.com
[b)] hirotaka@econ.kyushu-u.ac.jp

に対し, それよりも強い手ならばその札を手札から出し, 上に重ねることができる. 出せない場合や出さない場合はパスを宣言する. パスを宣言した場合場の札はなくなり最後に場に出したプレイヤーから再び場に札を出していく. 最初に手札を 0 枚にした方が勝ちとする. このゲームを二人単貧民としその解析を行う. 以下ではAを初期先手プレイヤー, Bを初期後手番プレイヤーとする.

3. 2 種類の手からなる場合

本節では単貧民において手の種類が限られた場合について検証していく.

弱い方の札を強さ 1 の札強い方の札を強さ 2 の札とする. またAの強さ 1 の札の枚数をA 1, Bの枚数をB 1, またAの強さ 2 の札の枚数をA 2, Bの強さ 2 の札の枚数をB 2 とする. すると最適戦略は以下のようになる. 場に札がないとき強さ 1 の手が 2 枚以上残っているときは強さ 1 の手から出していき強さ 1 の手が残り 1 枚になったとき強さ 2 の手から出していく. 場に札があるとき出せる手札があれば出す. また, $Min(A1, B2) = Z$, $Min(A2, B1) = Z'$ とする. このとき必勝判定問題は以下の通り

定理 1. ・$A1 > B2, A1 > B2$ のとき $Z' \geq Z$ ならば A は必勝戦略をもつ. $Z' < Z$ ならば B は必勝戦略を持つ.

・$A1 \leq B2$, $B1 > A2$ のとき $Z' + 1 \geq Z$ ならば A は必勝戦略をもつ. $Z' + 1 < Z$ ならば B は必勝戦略を持つ.

・$A1 > B2, B1 \leq A2$ のとき $Z' > Z$ ならば A は必勝戦略をもつ. $Z' \leq Z$ ならば B は必勝戦略を持つ.

・$A1 \leq B2, B1 \leq A2$ のとき $Z' \geq Z$ ならば A は必勝戦略をもつ. $Z' < Z$ ならば B は必勝戦略を持つ.

以下では必勝判定問題が上記の通りになることを証明していく.

Aから始まる巡をAの手番, Bから始まる巡をBの手番とする. また, AからBへ手番が変わる回数を X, BからAへ手番が変わる回数を X' とする.

まず, AからBへ手番が変わるのは Z 回以下であることを示す. AからBへ手番が変わるのはAが 1 を出し, 且つBがそれにパスをせずに 2 を出した時のみなので最大でも $Min(A1, B2) = Z$ 回しか変わらないよってAからBへ手番が変わるのは Z 回以下である. 同様に B から A へ手番が変わるのは Z' 回以下であることも示すことができる. したがって $X \leq Z, X' \leq Z'$ であることをしめすことができた.

続いて $A1 > B2$ のとき $Min(MaxX) = Z, A1 \leq B2$ のとき $Min(MaxX) = Z - 1$ であることを示す. まず, $MaxX$ のためのBの行動の一つはAが出した強さ 1 の札に対し, 持っている限りの強さ 2 のカードを出すことである. よって強さ 1 の札をできる限り出さないことが必要である. また, 強さ 1 の札は最後の一枚として出すことによって手番を相手に渡さない (でゲームを終了させる) ことができるので $A1 \leq B2$ のとき $Min(MaxX) = Z - 1$ である. $A1 \geq B2$ のときは $(A1 - 1)$ 枚の札を出す前に B が 2 を出し終わることが可能となってしまうので $Min(MaxX) = Z$ となる. 同様に $A1 < B2$ のとき $Min(MaxX') = Z'$, $A1 \leq B2$ のとき $Min(MaxX') = Z' - 1$ であることが分かる. また, 手番回数に関してプレイヤー A は $X' + 1$ 回, プレイヤー B は X 回である. ここで自分の手番もしくは相手の手番から自分の手番にしか変わるときのみでしか手札をなくすことができないので手番の大小が勝敗判定問題である.

従って定理は示された. (証明終)

4. 同一手札の場合における単貧民の必勝戦略について

本節ではお互いの手が全く同一のときの単貧民について考える.

4.1 それぞれの手札の中に同一の強さの手が含まれないとき

4.1.1 状態遷移図

まず, 単貧民において互いの手が n 手ずつ全く同様の手であり且つ各プレイヤーは高々 1 つずつしか同じ強さの手を持たないものを考える. この単貧民においては先手必勝である. 以下では先手必勝性を示していく. まず, 必勝戦略を示す. $n \leq 2$ のとき大きい数字から出すことが先手必勝戦略である. $n \geq 3$ のときこの単貧民における先手必勝戦略 W は以下の 2 つの戦略を組み合わせた戦略であることが言える.

戦略 W1　相手の手が 2 つ以上残っているときは宣言可能な数字のうち最小の数字を宣言し, 出せないときのみパスを選択する.

戦略 W2　残りの相手の手が 1 つ以下なら先手は宣言可能な最大の手から出す.

この戦略に則ってゲームを進めた場合必ず先手が勝てることを以下では示していく.

プレイヤー A の手を $A1 \sim An$, プレイヤー B の手を $B1 \sim Bn$ とする. 以下では単貧民におけるスタートから誰かがパスを出すまでを第 1 巡, 次のパスまでを第 2 巡…と定義する. また各巡の始まりの状態を以下のように定義する.

- S0 : 第 1 巡の状態
- S1 第 2 巡以降且つプレイヤー A から開始且つプレイヤー B が強さ n の手を残している状態
- S2　プレイヤー B から開始する且つ第 2 巡の状態
- S2'　プレイヤー B から開始する且つ第 3 巡以降の状態
- S3　プレイヤー A から開始且つプレイヤー B が強さ n の手を残していない状態
- S3'　プレイヤー A から開始且つ S2 において戦略 W2

を使用した場合の次の巡である状態

- S4　ゲームが終了した状態

以下ではこの定義において次の状態遷移図になることをまず示す.

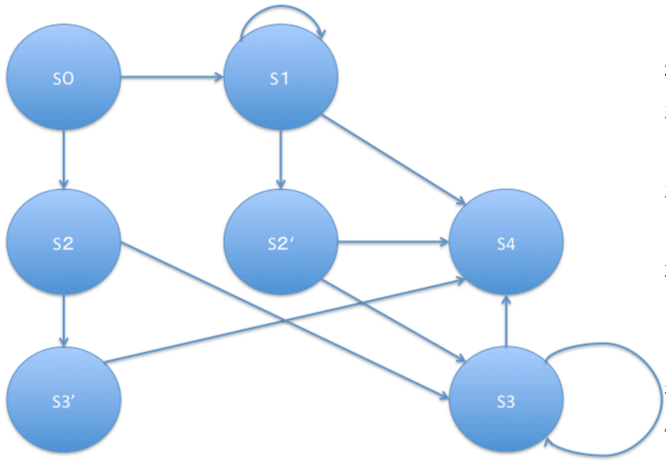

図 1　状態推移図

以下では簡略化のためプレイヤー A, つまり初期先手プレイヤーを単に先手, プレイヤーＢを後手と呼ぶこととする. この状態遷移図になることを示すためには以下の補題を証明すればよい.

補題 1. この単貧民においてプレイヤーＡは戦略 W1 の元では常に Bn を除くすべての手に対しその手に勝てる手を持つ.

証明まず以下のように定義をする. あるラウンドにおける A の手札集合を U, Bn を除いた B の手札集合を V とする. また $E(r)$:　r ラウンドの $U(r), V(r)$ において先手と後手の手同士の強さの関係を表したグラフで $(u, v)E$　を満たすものとする. また, $G = (U, V, R)$ $G(r) = (U(r), V(r), E(r))$ $Uf(r) = U(r)$ における最弱の手 $NG(r)(Uf(r))...(Uf(r))$ と隣接している点の集合とする. するとホールの結婚定理を利用して以下のことを示すことができる.

先ほどのように定義すると先手が戦略Wをとる限り $E(r)$ は以下の構造を持つ.

$NG(r)(Uf(r)$ に完全マッチングが存在. に完全マッチングが存在する.

また, 常に完全マッチングが存在するということは常に $NG(r)(Uf(r)$ を除くすべての手に対して勝つ手が存在することを意味し, $NG(r)(Uf(r))$ には $Uf(r)$ を用いて勝つことができるので補題の内容は示された.

また, この補題 1 より次のことが明らか

補題 2. プレイヤーＡが戦略W 2 をはじめてとるときプレイヤーＢが Bn を持っていなければその札に対してプレイヤーＢはその札に勝てる手を持たない.

証明プレイヤーＡが戦略W 2 をとるとき, 後手の手札は残り 1 枚である. 一方先手は戦略W 2 をとるとき以外は戦略W 1 をとるので補題 1 より常に後手の手札よりも強い手を持っている. よって先手の出すことのできる最大の強さの札より強い札を先手は持ちえない. 従って後手は必ずパスを選択するため補題は示された. 証明終

また, 次のことが言える.

補題 3. この単貧民の一巡において各プレイヤーが出せる札の最大枚数は $[n/2] + 1$ 枚

証明ある札が場に出ているときに場に出すことのできる札はその札の強さを上回っていなくてはならないので一巡における二人のプレイヤーが場に出す札の和の最大値は n 枚. また, 同一の巡において各プレイヤーは連続で札を出すことができない. したがって n が奇数のときある巡における先手プレイヤーが出すことのできる最大枚数は $[n/2] + 1$ 後手プレイヤーが出すことのできる最大枚数は $[n/2] - 1$. n が偶数のときある巡において場に出すことのできる最大枚数は先手プレイヤー後手プレイヤーともに $n/2$ 枚となる. したがって題意は示された. 証明終.

これらの補題を認めることによって状態推移図の通りになることを示すことができる.

4.1.2　各状態からの状態遷移

S0 の状態から始まるとき Bn を B が出さない限り A は必ずパスをせずに出すことができ, 最終的に B は必ずパスをすることになる. また, 一巡で各プレイヤーが出すことのできる最大枚数は $[n/2] + 1$ 枚なので, S4 に至ることはない. よって次の巡においては S1 から始まる. また Bn をだした際 A はパスを選択するので Bn をだした際 S2 に移行する.

S1 の状態から始まるとき Bn を B が出さない限り A は必ずパスをせずに出すことができ, 最終的に B は必ずパスをすることになるので次の巡においても S1 から始まるかゲームが終了するかどちらかである. よって S1 か S4 に移行する. また Bn をだした際 A はパスを選択するので Bn をだした際 S2' に移行する.

S2 の状態から始まるとき, 戦略 W を A がとっている場合 S2 に至るのは S0 からのみなので S2 状態の時後手は n を持っていない. よって戦略 W に沿った A は補題より, 必ず相手のすべての手に勝つ手を持っている. また, 補題 2 より仮に後手が残り 1 枚になっても戦略W 2 を用いるという戦略があるため S2 状態からゲームが終了することもない. よって S2 からは S3 または S3' にしか至らない.

また, S2' の状態から始まる場合は戦略 W を A がとっている場合 S2' に至るのは S1 からのみなので S2' 状態の時後手は n を持っていない. よって S2' からは S3 または S4 にしか至らない.

S3 の状態から始まる場合, 後手は Bn をもっていないた

め, 先手は戦略 W に沿ったとするとパスを選ぶことはない. よって常に後手のパスで終わるため S3 からは再び S3 に至るか S4 に至るか何れかである. 状態遷移図の通りになることが示された.

証明終

4.1.3 先手必勝性

本節では状態遷移図に沿った場合先手必勝となることを示していく. つまり S1 → S4, S2 → S4, S3 → S4, S3’ → S4 その何れになっても先手の勝ちで終わることを示す. 以下では先手と後手の初期手札が同じ枚数であることに着目し, 先手の手札と後手の手札の減少スピードの違いを利用して証明していく. 証明 S0 → S1 において先手から始まり先手で終わるため, 先手の出す手札の量＝後手の出す手札の量+1 が成立また, S1 から始まる巡において先手からはじまるため後手が場に札を出した瞬間においては, 先手の出す手札の量＝後手の出す手札の量となり先手が場に札を出した瞬間においては, 先手の出す手札の量＝後手の出す手札の量+1 が成立する. 各ステップでそれぞれのプレイヤーが出すことのできる最大数は n/2 枚であるので S1 → S4 となるとき 1 度は S0 → S1 を経由しなければならない. よって S1 においては常に 1 枚以上先手の方が手札の枚数は少ない. 従って S1 → S4 の場合 B の手札が残り 1 枚になることなく先手必勝

S1 → S2’ において先手から始まり後手で終わるため S1 から始まる巡において先手の出す手札の量＝ S1 から始まる巡において後手の出す手札の量となる.

S0 → S2 となった場合 S0 → S2 において先手から始まり後手で終わるため先手の出す手札の量＝後手の出す手札の量となる.

S2 から始まる巡において後手から始まるため後手が場に札を出した瞬間においては S2 から始まる巡において先手の出す手札の量＝ S2 から始まる巡において後手の出す手札の量-1 となり先手が場に札を出した瞬間においては S2 から始まる巡において先手の出す手札の量＝ S2 から始まる巡において後手の出す手札の量が成立する. 従って後手が S2 においては先に手札が残り 1 枚になることがある. そのとき先手は残り手札は 2 枚であり戦略W 2 をとることとなるが, S2 の状態において後手は Bn を持っていないため補題 2 より後手はパスを選択する. 従って後手の手札は残り 1 枚になった場合は S3’ そうでない場合は S3 に移行する. S3’ から始まる巡において先手は手札が残り 1 枚のため, S3’ からＳ 4 に至る場合先手の勝利である.

S2’ から始まる巡においても同様に後手から始まるため後手が場に札を出した瞬間においては $S2'$ から始まる巡において先手の出す手札の量＝ $S2'$ から始まる巡において後手の出す手札の量-1 となり先手が場に札を出した瞬間においては $S2'$ から始まる巡において先手の出した手札の量＝ $S2'$ から始まる巡において後手の出した手札の量が成立する. $S2'$ の状態へは S0 → S1 を一度経由しないと到達できないので S2’ から始まる巡において常に $S2'$ における先手の手札の枚数 $\leq S2'$ における先手の手札の枚数 が成立.

従って $S2' \rightarrow S4$ に至るとき先手の勝ちで終わる. また, $S2' \rightarrow S3$ において後手から始まり先手で終わるため $S2'$ から始まる巡において先手の出す手札の量先手の出す手札の量＝後手の出す手札の量となるまた, $S3 \rightarrow S3$ において先手から始まり先手で終わるため $S3$ から始まる巡において先手の出す手札の量先手の出す手の量＝ $S3$ から始まる巡において先手の出す手札の量後手の出す手札の量+1 となる

S3 → S4 になるとき, ここまでで先手の出した手の量と後手の出した手の量の関係は先手の出した手札の量 $\geq$ 後手の出した手札の量となっており, また, この巡は先手から始まるので常に先手の出した手札の量のほうが多くなるためやはり先手が勝つ.

以上よりすべての場合においてゲームが終了するとき先手が勝つためこの単貧民は先手必勝であり W は先手必勝戦略の一つである.

4.2 それぞれの強さの札を初期に手札に二枚ずつ持つ場合

．4．1 と同様の議論をすることでお互いがそれぞれの強さの札を 2 枚ずつ出す場合についても先手必勝であることを示すことができる. 以下でこれを示していく.

4.2.1 状態推移図

単貧民において互いの手が n 手ずつ全く同様の手であり且つ各プレイヤーは高々 2 つずつのみしか同じ強さの手を持たないものを考える.

定理 2. この単貧民においても先手必勝である.

$n \geq 3$ のとき必勝戦略は 1 枚ずつの場合と同様である. つまりこの単貧民における先手必勝戦略 W は以下の 2 つの戦略を組み合わせた戦略であることが言える.

戦略 W1　相手の手が 2 つ以上残っているときは宣言可能な数字のうち最小の数字を宣言し, 出せないときのみパスを選択する.

戦略 W2　残りの相手の手が 1 つ以下なら先手は宣言可能な最大の手から出す.

この戦略に則ってゲームを進めた場合必ず先手が勝てることを以下では示していく. ここでは状態遷移図を作成し, パスの長さの大小で証明していく. まず, プレイヤー A の手を A1〜An, プレイヤー B の手を B1〜Bn とする.

以下では 4．1 同様, 単貧民におけるスタートから誰かがパスを出すまでを第 1 巡, 次のパスまでを第 2 巡…と定義する. ここでお互いの手札が 2 枚ずつであっても補題 1 が同様に成立することは強さの関係を表す関係を示すグラフを 4．1．2 同様の定義でかけることより明らか. また, 補題 2, 補題 3 も 4．1．2 節同様に証明可能である. また, 補題 3 より次のことが言える. 補題 4　$n \geq 2$ のときこの単

貧民は 3 巡以内に終わることはない．証明　$n \geq 4$ のとき $3(\lceil n/2 \rceil + 1) \leq 2n$ となるので成立．n=2 のとき 1 巡に出せる札の最大数は 1 枚なので成立．n=3 のときプレイヤー A は A1, A3 あるいは A2 のみしか同じ巡に出すことができない．プレイヤー B も同様にある巡において B1, B3 あるいは B2 のみしか同じ巡に出すことができない．従って $n \geq 2$ のとき 3 巡以内に終わることがない．

また各巡の始まりの状態を以下のように定義する．

- S0：第 1 巡の状態
- S1 第 2 巡以降且つプレイヤー A から開始且つプレイヤー B が強さ n の手を 2 枚残している状態
- S2 プレイヤー B から開始する且つプレイヤー B が 1 枚強さ n の手を手札に保有している状態.
- S3 プレイヤー A から開始且つプレイヤー B が強さ n の手を 1 枚手札に残している状態
- S4 プレイヤー B から開始する且つ B が強さ n の手を手札に保有していない状態.
- S5 プレイヤー A から開始且つプレイヤー B が強さ n の手を残していない状態
- S6 プレイヤー A から開始且つ S4 において戦略 W2 を使用した場合の次の巡である状態
- S7 ゲームが終了した状態

このように定義すると 4. 1 同様の作業を行うことによって状態遷移図は図 2 の通りになる．

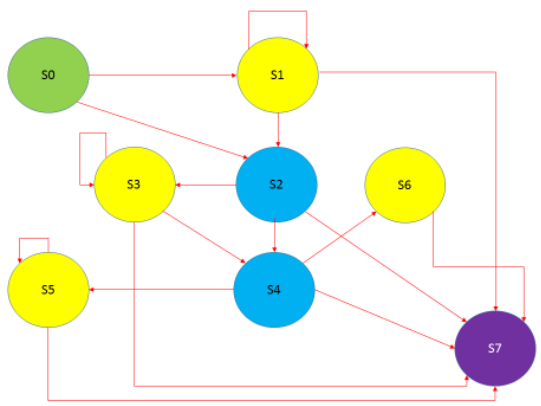

図 2　状態推移図

この状態推移図の通りになることは 4. 1. 1 同様の手法を用いることによって示すことができる．

4.2.2　状態推移図

ゲームが終了するのは第 4 巡終了以降である．したがって各状態をノード, 各状態推移を長さ 1 の有向辺とみなすと S0 から S7 までのパスのうち長さが 4 以上のパスのみがこの単貧民で起こり得る状態推移である．ここでは長さ 4 以上の S0 から S7 のパスのうち後手の勝利で終わるパスが存在しないことを以下では示していく．

ここで各辺において先手の手札の量と後手の手札の量の変化を見ていく．先手から始まり先手で終わるとき, 先手の出す手札の量＝後手の出す手札の量+1 が成立先手から始まり後手で終わるとき, 先手の出す手札の量＝後手の出す手札の量となる．後手から始まり先手で終わるとき, 先手の出す手札の量＝後手の出す手札の量となる．後手から始まり後手で終わるとき, 先手の出す手札の量＝後手の出す手札の量-1 となる．従って, 先手の出す手札の量-後手の出す手札の量を状態推移図に加えると図 3 の通り

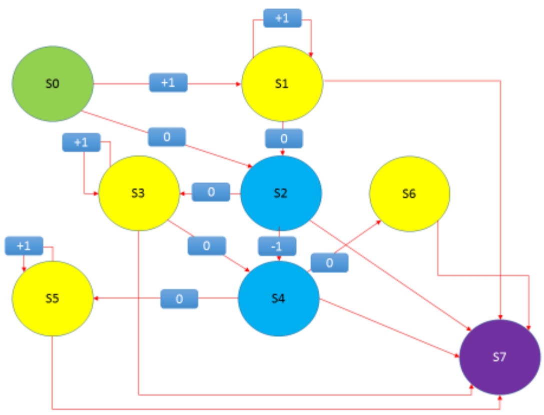

図 3　状態推移図

まず、以下では長さ 5 以上のパスで後手が勝てないことを以下では示していく．この図において長さ 5 以上の S0 → S7 のパスを検索するとすべてのパスは消費された手札の量の差の和が 0 で S1, S3, S5, S6 から S7 に至る又は消費された手札の量の差の和が 1 以上で S7 に至るかのいずれかである．

ここで先手からはじまる巡において

後手が場に札を出した瞬間においてはその巡における先手の出す手札の量＝その巡における後手の出す手札の量

先手が場に札を出した瞬間においてはその巡における先手の出す手札の量＝その巡における後手の出す手札の量+1 が成立する．

後手からはじまる巡において

後手が場に札を出した瞬間においてはその巡において先手の出す手札の量＝その巡において後手の出す手札の量-1 となり

先手が場に札を出した瞬間においてはその巡において先手の出す手札の量＝その巡において後手の出す手札の量が成立する．

従って長さ 5 以上のパスで後手が勝てないことを示すことができる．

続いて長さ 4 の S0 → S7 のパスにおいて長さ 4 のパスを検索すると S0 → S1 → S2 → S4 → S7, S0 → S2 → S3 → S4 → S7, S0 → S2 → S4 → S6 → S7 の 3 通りのみが手札の量の差の和が 0 以下であることがわかる．この 3 通りにおいてそれぞれ考えてみると

S0 → S1 → S2 → S4 → S7 においてこのように辿るとき S4 → S7 において後手は手札残り一枚を経由するため S4 → S6 → S7 となる．したがって S0 → S1 → S2 → S4 → S7 は起こり得ない．

S0 → S2 → S3 → S4 → S7 においてもこのように辿るとき S4 → S7 において後手は手札残り一枚を経由するため S4 → S6 → S7 となる．したがって, S0 → S2 → S3 → S4 → S7 も起こり得ない．

S0 → S2 → S4 → S6 → S7 においてこのように辿るとき S4 において後手は手札が残り一枚を経由しないため S6 に至らない．したがって S0 → S2 → S4 → S6 → S7 も起こり得ない．

よって先手の必勝性を示すことができた．

5. まとめと考察

本論文では二人でおこなう単貧民において札の種類が限られているとき, お互いの手札が同一のときという特殊の状況下においての最適戦略, 必勝判定について証明した．また, その中で相手の手に対する「ペア」に着目することで, 二人プレイヤーで行う単貧民の勝利判定ができることを示唆した．今後は二人単貧民全体においてその最適戦略と必勝判定問題を解くアルゴリズムを見つけたい．

参考文献

[1] 西野順二　2007「単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察」(“An analysis on TANHINMIN game”) 」ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集 66 - 73