

重み付きサイクルにおける2人プレイヤー拡散競争ゲームの ナッシュ均衡

山口 凌吾^{1,a)} 小野 廣隆^{2,b)}

概要: 拡散競争ゲームは、情報が社会的ネットワークを通じて順に拡散して行く現象をグラフ上のゲームとしてモデル化したものである。これまで重みなしの様々なグラフクラスにおけるナッシュ均衡の存在性について研究されており、例えば n -サイクル上の k 人プレイヤーゲームは任意の n, k に対して必ずナッシュ均衡が存在することなどが知られている。本研究では重みを導入し一般化したモデルについて考察し、重み付きサイクル上での2人プレイヤーゲームにおけるナッシュ均衡の存在性に関するサイクル長による特徴づけを行う。すなわち、 $n = 3, 4, 5$ のサイクルでは任意の重み付けに対してナッシュ均衡が存在するが、 $n \geq 6$ ではナッシュ均衡が存在しないような重み付けが存在することを示す。

キーワード: 拡散競争ゲーム, ゲーム理論, ナッシュ均衡, サイクル, ソーシャルネットワーク

Nash Equilibria for Competitive Diffusion Games on Weighted Cycles

YAMAGUCHI RYOGO^{1,a)} ONO HIROTAKA^{2,b)}

Abstract: The competitive diffusion game is a game-theoretic model to analyze information diffusion on social networks. Many researchers study the existence of an Nash Equilibrium on various classes of unweighted graphs, and it is known that k -player competitive diffusion games on n -cycles always have an Nash Equilibrium for any k and n , for example. In this paper, we study 2-player diffusion games on weighted cycles and characterize the existence of an Nash Equilibrium with respect to cycle length n : we show that the game on any weighted cycles with $n = 3, 4, 5$ always has an Nash Equilibrium, whereas there exist weighted cycles with $n \geq 6$ that have no Nash Equilibrium.

Keywords: Competitive diffusion game, Game theory, Nash equilibria, Cycles, Social networks

1. はじめに

情報の社会的ネットワークを介した拡散は古くから研究対象となっており、Twitter や Facebook などの SNS の登場によりそれらの可視化が容易となっている。拡散競争ゲームとは、情報が社会的ネットワークを通じて次々と拡散して行く現象をグラフ上のゲームとしてモデル化したものである [1]。このモデルでは頂点を個人、辺を個人間のつ

ながり、頂点の重みを個人の重要性和と想定しており、各プレイヤーがある頂点に情報を送ると、ステップごとに隣接点にその情報が拡散して行く。一度あるプレイヤーから情報を受けとった頂点は、別のプレイヤーからの情報を受け取ることはない。また、複数のプレイヤーから情報を送信された頂点は情報を受け取らず、その後も情報を受け取ることはない。各プレイヤーの利得は、自分からの情報を受け取った頂点の総重みで定義される。また、ナッシュ均衡とはどのプレイヤーも戦略を変えることによって自分の利得を増やすことができない安定した状態のことを言う。

これまで、重みなしの様々なグラフクラスにおけるナッシュ均衡の存在性について研究されている。例えば、2人プ

¹ 九州大学大学院 経済学府 経済工学専攻
Department of Economic Engineering, Kyushu University

² 九州大学大学院 経済学研究院 経済工学部門
Department of Economic Engineering, Kyushu University

a) 2EC15063R@s.kyushu-u.ac.jp

b) hirotaka@econ.kyushu-u.ac.jp

レイヤー拡散競争ゲームについて、直径 2 のグラフでナッシュ均衡が存在しない場合があること [5], 木においては常にナッシュ均衡が存在すること [4] がそれぞれ示されている。また、パスにおいて 3 人プレイヤーかつ長さ 6 以上の場合を除いてナッシュ均衡が存在し、サイクルにおいては任意の k, n に対して、常にナッシュ均衡が存在すること、 $\min\{p, q\} \geq 5$ の $p \times q$ グリッドグラフにおいて 3 人プレイヤーでナッシュ均衡が存在しないことが示されている [2]. 重み付きの拡散競争ゲームについては、ナッシュ均衡が存在するかどうかの判定問題に対する計算量に関する結果がある [3].

本研究では、重み付きサイクルにおける 2 人プレイヤー拡散競争ゲームのナッシュ均衡の存在性について考察する。

2. 準備

重み関数 $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ を持つ n 頂点からなる無向グラフ $G = (V, E)$ における k 人プレイヤー拡散競争ゲームは以下のように行われる。

時刻 1

各プレイヤー i は一つの頂点 $v \in V$ を選択する。この頂点を初期点と呼ぶ。 v がただ一人のプレイヤー i に選択されている場合、 v はプレイヤー i に支配され、複数のプレイヤーに選択された場合、 v は各時刻において、どのプレイヤーにも支配されることのない“中立点”となる。

時刻 $t (t \geq 2)$

$v \in V$ に対して、

- (1) v が中立点でなく、時刻 $t-1$ までにどのプレイヤーにも支配されていない、
- (2) v がプレイヤー i に支配されている頂点を隣接点に持ち、プレイヤー $j (i \neq j)$ に支配されている頂点を隣接点に持たない。

上の二つを満たす時、 v はプレイヤー i に新たに支配される。 v が (1) を満たしている状態で、 v の隣接点を支配しているプレイヤーが複数存在する場合、 v は中立点となる。

どのプレイヤーもこれ以上頂点を支配できなくなった時にゲームは終了する。

ここで、 $s = (s_1, s_2, \dots, s_k) \in V^k$ を各プレイヤーが時刻 1 で選択する頂点（初期点）の組、すなわち戦略の組とし、利得 $U_i(s)$ を戦略の組 s のもとでゲーム終了時にプレイヤー i が支配した頂点の重みの合計とする。

s に対し、 (s_{-i}, v') をプレイヤー i が s_i の代わりに v' を選択した時の戦略の組とすると、以下を満たす時に s はナッシュ均衡であると言う：

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall v' \in V, U_i(s_{-i}, v') \leq U_i(s).$$

すなわち、全てのプレイヤーに対して、他のプレイヤーの

戦略を固定した上で自分の戦略を変えても自分の利得を増やすことができないということが成り立つ時の戦略の組をナッシュ均衡であると言う。

本論文では、2 人プレイヤーかつサイクル上における拡散競争ゲームについて考察する。 n 頂点サイクルとは $[n] = \{1, \dots, n\}$ とすると、頂点集合 $V = [n]$, 辺集合 $E = \{\{i, i+1\} \mid i \in [n-1]\} \cup \{\{n, 1\}\}$ となっている無向グラフのことである。

3. 主結果

定理 1. 重み関数 $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ を持つ n 頂点サイクルにおける 2 人プレイヤー拡散競争ゲームにおいて、 $n = 3, 4, 5$ の時は常にナッシュ均衡が存在し、 $n \geq 6$ の時はナッシュ均衡が存在しない場合がある。

以下では n が奇数の場合と偶数の場合に分けて考える。

3.1 n が奇数の場合

2 人プレイヤーの場合、それぞれが初期点として同じ頂点を選択しなければ、どのように初期点をとってもただ一つの中立点生まれ、プレイヤーはそれぞれ $\frac{n-1}{2}$ 個の頂点を支配する。

v_i を基点として右回りに $\frac{n-1}{2}$ 個の頂点の重みの合計を基点の位置に記録し、記録した値、すなわちとりうる利得を要素とするベクトルを $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ とする (図 1 では $u_i = w_i + w_{i+1}$, $u_5 = w_5 + w_1$)。

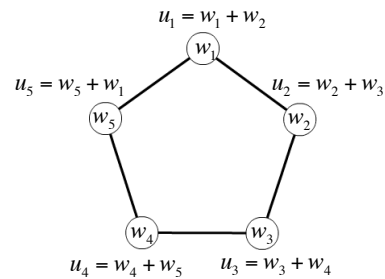


図 1 5 頂点サイクル

また、一方のプレイヤーはもう片方のプレイヤーが選択した初期点を支配することができないので、とりうる利得の組合せは $\frac{n-1}{2}$ 個離れた位置同士ということになる。ここで、 $u_i \geq u_j$ となるように利得の組合せ (u_i, u_j) をとり、その集合を U_A とおく (図 1 において、例えば $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq u_4 \geq u_5$ とすると、 $U_A = \{(u_1, u_3), (u_1, u_4), (u_2, u_4), (u_2, u_5), (u_3, u_5)\}$)。すると以下が成り立つ。

補題 1. $n = 3, 5$ の時、 U_A におけるパレート最適 (すなわち $\forall (u_i, u_j) \in U_A$ に対して、 $u_i^* \geq u_i$ または $u_j^* \geq u_j$ を満

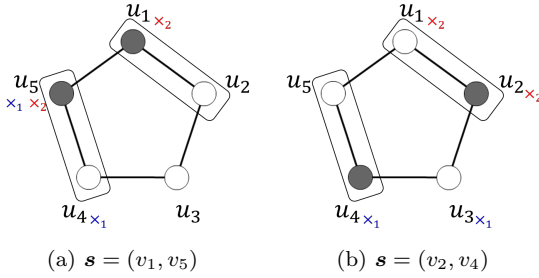


図 2 (u_1, u_4) を達成する初期点 (図中では灰色の頂点) の配置パターン. 図中の $\times_1, \times_2$ はそれぞれプレイヤー 1, プレイヤー 2 が戦略を変更しても得ることのできない利得にマークされている.

たす (u_i^*, u_j^*) である組の中で, 利得の差 $(u_i^* - u_j^*)$ が最小となるような組を達成する初期点の配置の中にナッシュ均衡となるものが存在する.

ここで, 補題 1 における条件を満たす利得の組合せについて以下のことが成り立つ.

主張 1. U_A におけるパレート最適である組の中で, 利得の差が最小となるような組を (x, y) とおく ($x \geq y$). このとき以下が成り立つ.

$$y \geq u_j, \forall (u_i, u_j) \in U_A.$$

このことは, 上述の条件を満たす利得のペアにおいて小さい方の利得が, 他のどの利得のペアにおける小さい方の利得以上であることを意味している. これはパレート非最適な組に対してはパレート最適性を, 他のパレート最適な組に対してはパレート最適な組の集合の中で利得の差が最小であることを考慮すれば容易に示される.

補題 1 の証明. $n = 3$ のときは重み値が最大の頂点と 2 番目に大きい頂点をそれぞれのプレイヤーが選択すれば, 明らかにナッシュ均衡である.

$n = 5$ のとき, 補題 1 の条件を満たす利得の組合せを (u_1, u_4) とする ($u_1 \geq u_4$). なお, このように仮定を置いても一般性を失わない. このとき, 初期点の配置は図 2(a), (b) のいずれかである.

ここで (u_1, u_4) のパレート最適性より $u_4 \geq u_3$, 主張 1 より $u_4 \geq u_2$ または $u_4 \geq u_5$ であることが分かる.

- (i). $u_4 \geq u_2$ かつ $u_4 \geq u_5$ のとき, 図 2 におけるどちらのパターンにおいてもプレイヤー 2 は戦略を変更しても利得を大きくすることができない. $u_1 \geq u_4$ であるので, プレイヤー 1 についても同様である. よって $(v_1, v_5), (v_2, v_4)$ がナッシュ均衡となる.
- (ii). $u_4 \geq u_2$ かつ $u_4 < u_5$ のとき, 図 2(a) の取り方をすればプレイヤー 2 は戦略を変更しても利得を大きくす

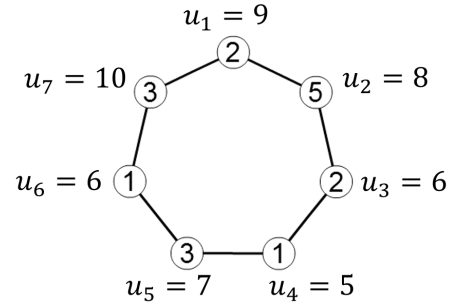


図 3 ナッシュ均衡が存在しない 7 頂点サイクル.

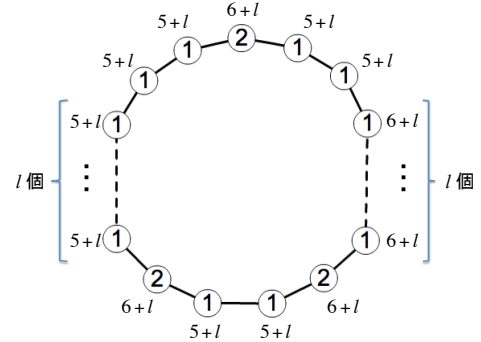


図 4 $n \geq 9$ (n は奇数) におけるナッシュ均衡が存在しない n 頂点サイクル.

ることができない. $u_1 \geq u_4$ であるので, プレイヤー 1 についても同様である. よって (v_1, v_5) がナッシュ均衡となる.

- (iii). $u_4 < u_2$ かつ $u_4 \geq u_5$ のとき, 図 2(b) の取り方をすれば, プレイヤー 2 は戦略を変更しても利得を大きくすることができない. ここで $u_1 < u_2$ とすると, (u_1, u_4) がパレート最適であるという仮定に反するので, $u_1 \geq u_2$ である. よって, (v_2, v_4) がナッシュ均衡となる.

□

$n \geq 7$ の時は, 例えば図 3, 図 4 のようにしてナッシュ均衡が存在しないグラフを作ることができる.

$n = 7$ のとき, (u_1, u_5) を補題 1 の条件を満たす組とすると, $u_3, u_4, u_6 \leq u_5 < u_2 < u_1 < u_7$ が成り立つようにすれば, ナッシュ均衡が存在しないグラフを作ることができる (図 3 参照). すなわち利得 u_5 を得ているプレイヤーが利得 u_2 を, 利得 u_1 を得ているプレイヤーが利得 u_7 を得るように, 戦略を変更するインセンティブを同時に排除する初期点の配置は存在せず, なおかつ補題 1 の条件を満たす組が (u_1, u_5) 以外に存在しないということである.

図 4 における $n \geq 9$ のグラフは, 重み値が 2 と 1 のみで構成された奇数頂点サイクルである. n が 9, 11, 13, ... と増加していくのに対応して, 図の中括弧で囲われた部分において重み値 1 の頂点が 1 つずつ, すなわち合計で 2 つずつ増えていくという構造になっている. ここで図の中括弧で囲われた部分における頂点の数を l ($l \geq 0$) 個とする

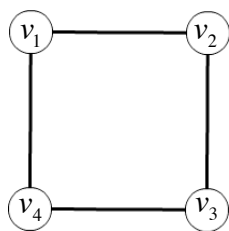


図 5 4 頂点サイクル.

と、実現し得る利得は $6+l, 5+l$ のいずれかである。利得 $6+l$ を達成するのは重み値 2 の頂点を 2 つ支配しているときであり、 $(6+l, 6+l)$ という利得の組合せはあり得ない。 $(5+l, 5+l), (6+l, 5+l)$ という利得の組合せのときは $5+l$ の利得を得ているプレイヤーが重み値 2 の頂点を 2 つとるように戦略を変更し利得を増やすことができるためナッシュ均衡が存在しない。

3.2 n が偶数の場合

2人プレイヤーの場合、それぞれが初期点として同じ頂点を選択しなければ $\frac{n}{2}$ 個の頂点を支配する場合と、 $\frac{n}{2} - 1$ 個の頂点を支配する場合があるが、後者の場合はどちらかのプレイヤーがそこから利得を大きくすることが必ずできるためナッシュ均衡にはなり得ないので、 $\frac{n}{2}$ 個の頂点を支配する場合のみ考えればよい。

補題 2. $n = 4$, 重み関数が $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ のとき, 2 人プレイヤー拡散競争ゲームのナッシュ均衡が存在する.

証明. 各プレイヤーが戦略の組 (v_1, v_2) を取っているとすると, $U_1(v_1, v_2) = w_1 + w_4$, $U_2(v_1, v_2) = w_2 + w_3$ である. ここでプレイヤー 2 が戦略を変更したいとすると, $w_2 > 0$ より, $U_2(v_1, v_2) > U_2(v_1, v_3)$ であるので, 候補点は v_4 のみであり, $U_2(v_1, v_4) > U_2(v_1, v_2)$ すなわち $w_4 > w_2$ である. そうすると戦略の組 (v_1, v_4) において, プレイヤー 2 は戦略を変更しても利得を大きくすることができないので, プレイヤー 1 が戦略を変更したいと考えるとする. 上述と同様の議論により候補点は v_3 のみであり, $U_1(v_3, v_4) > U_1(v_1, v_4)$ すなわち $w_3 > w_1$ である. ここで $w_4 > w_2$, $w_3 > w_1$ であるので, どちらのプレイヤーも戦略を変更することによって利得を大きくすることができない. よってこの場合は戦略の組 (v_3, v_4) がナッシュ均衡となる. 以上の議論により, 一般性を失うことなくどのような戦略の組から始めてもナッシュ均衡である戦略の組に辿り着けることが示されたので, $n = 4$ のときは必ずナッシュ均衡が存在する. $\square$

図 6 のグラフは重み値 1, 2, 3 の頂点で構成された偶数頂点サイクルである. n が 6, 8, 10, $\dots$ と増加していくのに対応して, 波線の部分に重み値 1 の点が一ずつ増えていく. 波線の部分における重み値 1 の頂点数をそれぞれ

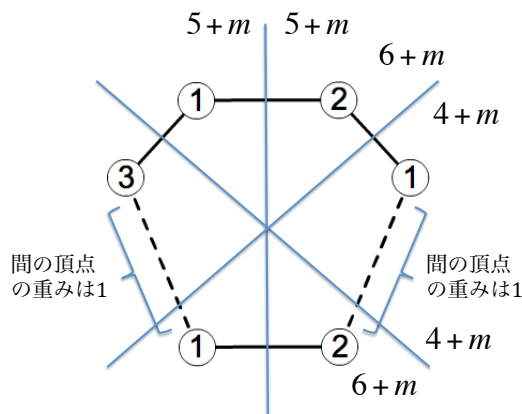


図 6 $n \geq 6$ (n は偶数) における, ナッシュ均衡が存在しない n 頂点サイクル.

$m(m > 0)$ とする.

偶数頂点サイクルにおいて、 $\frac{n}{2}$ 個の頂点をそれぞれが支配する場合、サイクルにおける頂点の総重みを 2 人のプレイヤーが利得として分割すると考えることができる。そこで、 v_i と v_{i+1} ($i = \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$) の間で分割された利得を d_i, d'_i とおく。例えば図 6 においては $(d_1, d'_1) = (5 + m, 5 + m)$, $2 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ において $(d_j, d'_j) = (6 + m, 4 + m)$, $(d_{\frac{n}{2}}, d'_{\frac{n}{2}}) = (4 + m, 6 + m)$, $d_i + d'_i = \sum_{p=1}^n w_p = 10 + 2m$ である。なお、 (d_i, d'_i) を達成する初期点の配置は d_i と d'_i を隔てている線を軸として線対称になっていなければならない。

図 6 を眺めてみると, $2 \leq j \leq \frac{n}{2}$ における分割 (d_j, d'_j) について, $4+m$ の利得を得ているプレイヤーは d_1 と d'_1 を隔てている線を軸として, もう一方のプレイヤーが選択した初期点の位置と線対称に初期点を取れば利得を $5+m$ へと増加させることができる. また分割 $(d_1, d'_1) = (5+m, 5+m)$ においては, どの初期点の配置においても, どちらかのプレイヤーが利得を $6+m$ へと増加させることができる. このことはすなわち, 分割における利得の差が最小であることがナッシュ均衡となるための必要条件となるが, 利得の差が最小である分割を (d_1, d'_1) とすると, $d_1 < d_2, d_1 < d'_2$ すなわち, $v_1 < v_{\frac{n}{2}+1}, v_{\frac{n}{2}+2} < v_2$ となっていれば, そこから利得を大きくすることができるので, ナッシュ均衡にはなり得ないということを意味している.

3.3 まとめ

補題 1, 補題 2, および図 3, 図 4, 図 6 における例によつて定理 1 が示された.

ここで任意の二つのサイクルが高々 1 点しか共有点を持たないグラフであるカクタス (図 7 参照) について以下のことがいえる.

系 1. サイズ 6 以上のサイクルを少なくとも一つ持つ重みなしカクタスで, 2 人プレイヤー拡散競争ゲームのナッシュ

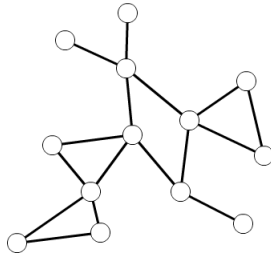


図 7 カクタスの例.

均衡を持たないものが存在する.

これは、重みなしカクタスにおけるナッシュ均衡の候補がとあるサイクル内にあるとしたときに、重みなしカクタスにおけるナッシュ均衡の存在性に関する議論が重み付きサイクルにおけるものと同値になることから明らかである.

このことは、木とサイクルを高々 1 つしか含まないようなカクタスの構造の類似性を考えると非常に興味深い. すなわち 1 節でも述べたように木の場合 2 人プレイヤー拡散競争ゲームは必ずナッシュ均衡を持つが、長さ 6 のサイクルを 1 つ含めただけで、この性質が破られることが分かる.

4. おわりに

本研究では、重み付きサイクル上の 2 人プレイヤー拡散競争ゲームにおいてサイクル長が 3, 4, 5 のときはナッシュ均衡が必ず存在し、6 以上のときは必ずしもそうではないことを示した. このことは、重みなしのサイクルにおいては任意のプレイヤー数、サイクル長に対して常にナッシュ均衡が存在する事実に対し、重みを導入するとナッシュ均衡の存在性が大きく制限されることを示唆する. また、このことは木を一般化したグラフであるカクタスについて 2 人プレイヤーであってもナッシュ均衡が存在しないことがあるということを示唆したものである.

今後の課題として、重み付きサイクルにおけるプレイヤー数を増やした場合のナッシュ均衡の存在性、重みなしカクタスにおけるナッシュ均衡の存在性に関する特徴づけが挙げられる. また、他のグラフクラスにおける重み付けによる一般化、ナッシュ均衡の存在性に関する考察も課題である.

参考文献

- [1] Alon, N., Feldman, M., Procaccia, A.D., Tennenholtz, M.: A note on competitive diffusion through social networks. Information Processing Letters 110(6), 221-225(2010).
- [2] Bulteau, L., Froese, V., Talmon, N.: Multi-Player diffusion games on graph classes. In: Proc. of the 12th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation(2015).
- [3] Ito, et al.: Competitive Diffusion on Weighted Graphs. In: Algorithms and Data Structures. Springer International Publishing, 422-433(2015).
- [4] Small, L., Mason, O.: Nash Equilibria for competitive information diffusion on trees. Information Processing Letters 113(7), 217-219(2013).

- [5] Takehara, R., Hachimori, M., Shigeno, M.: A comment on pure-strategy Nash equilibria in competitive diffusion games. Information Processing Letters 112(3), 59-60(2012).