

3次元空間中の自律分散ロボットによる平面合意問題

上原 太一^{1,a)} 山内 由紀子² 来嶋 秀治² 山下 雅史²

概要： 自律的に計算，移動を行う匿名なロボット群から構成される分散システムに対して，2次元平面上での分散制御による集合問題（点形成問題）やパターン形成問題などの合意形成問題が研究されている．2次元平面上におけるこれらの問題の可解性は，ロボットの配置の回転対称度から決まることが知られている [1]．これは，決定性の手法では，ロボットの配置の対称性が壊せないためである．3次元空間中の点配置には，3次元的な回転群に代表されるように，2次元平面上の配置と比べて，多様な対称性が存在する．本研究では，3次元空間中のロボットの配置の対称性と合意形成の関係を明らかにすることを目的とする．本論文では，3次元空間中のロボットに対する平面合意問題に着目する．

キーワード： ロボット群，分散制御，平面合意問題，対称性

Plane Agreement among Distributed Anonymous Robots in the Three Dimensional Space

Abstract: A mobile robot system consists of anonymous robots that autonomously computes its next position and moves. The gathering problem and the pattern formation problem have been studied because they are fundamental agreement problems of distributed control for mobile robot system. Solvability of these problems can be characterized by the symmetricity of robot's configuration. Symmetricity of a set of points in the three dimensional space has been discussed by a variety of symmetric operations, such as rotation groups, that are considered as a generalization of symmetry in a two dimensional plane. We studied the relation between symmetry of robot's configuration and solvability of agreement problems. In this paper, we focus on the plane agreement problem in the three dimensional space.

Keywords: mobile robot system, distributed control, the plane agreement problem, symmetricity

1. はじめに

自律的に計算，移動を行う複数のロボットから成る分散システムを自律移動ロボット群と呼ぶ．各ロボットは他のロボットの配置をもとに次の移動先を決定しながら，ロボット群全体で協調動作し，与えられたタスクを実現する．自律移動ロボット群の分散制御については，集合問題（点形成問題），パターン形成問題といった問題が多く研究されてきた [1], [2]．これらの問題は，ロボット群が複雑なタスクを分散，並列的に行うための基本的な問題といえる．こ

れらの既存研究は，ロボット群の計算能力を，実現可能なタスクから計測することを目的とし，ロボットの同期性，メモリの有無，移動性能，観測誤差，対称性などから様々な特徴づけが行われてきた．これらのうち，最も重要な性質はロボットの配置の対称性といえる．鈴木と山下は，2次元平面上での集合問題，パターン形成問題に対するロボットの計算能力を明らかにした [1]．

本研究では，3次元空間中のロボット群に対する対称性に着目する．3次元空間中のロボットが同一平面上の異なる点に移動する平面合意問題は，3次元空間中での合意形成についての最も基本的な問題であると考えられる．平面合意問題に関して，ロボットの成す凸多面体の回転群の性質と，頂点数と面の関係から，平面を合意できるための十分条件を明らかにする．

¹ 九州大学工学部電気情報工学科
Department of Electrical Engineering and Computer Science, Kyushu University

² 九州大学大学院システム情報科学研究院
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

^{a)} uehara@tcs-lab.csce.kyushu-u.ac.jp

2. 準備

2.1 ロボットモデル

$R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ を 3 次元ユークリッド空間中の匿名なロボットの集合とする．ただし各 i ($1 \leq i \leq n$) は説明の便宜上使用し，各ロボット r_i は自身が i 番目のロボットだということを知らず，他のロボットの番号もわからない．加えてロボットは外見によって区別することができないこと．さらに，ロボットは全て同じアルゴリズムを実行して，自身の動きを自律的に決めている．本研究では，ロボットを 3 次元ユークリッド空間中の点とみなす．そのため複数のロボットは同時に同じ位置に存在することができる．しかし，移動中に同じ点に存在しても，その場で停止することはない．

本論文では，離散的な時刻 $0, 1, 2, \dots$ を考え，初期位置は全て異なっているとす．各ロボット r_i は図 2.1 で示すような固有の局所座標系を持ち，それらは固有の軸の向き，単位距離，原点の位置を持つ．ただし，各ロボットは現在位置を原点とする．各ロボットの局所座標系は，全て右手系座標系であり，かつ直交座標系である．また各 r_i は r_j ($i \neq j$) の局所座標系を知らない．

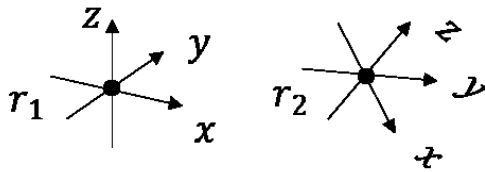


図 1 2 台のロボット r_1, r_2 の局所座標系の例

次に，ロボットの動作単位について説明する．各ロボットは以下の 3 つのフェーズからなる Look-Compute-Move サイクルを繰り返す．

(1) Look フェーズ

他の全てのロボットの位置を取得する．ただし，座標系は自身の局所座標系である．ロボットは点であるので，この操作から全てのロボットの座標位置の集合を得る．

(2) Compute フェーズ

Look フェーズで得られた情報をもとに，与えられたアルゴリズムに従って自身が次に移動する位置を計算する．

(3) Move フェーズ

Compute フェーズで計算した位置に移動する．

このサイクル内の実行タイミングについて，非同期，準同期，完全同期 [2] という 3 つの基本的な同期モデルがある．本論文では，各時刻ごとに全てのロボットが同期してサイクルを実行する完全同期モデルを扱う．さらに，ロ

ボットは現在のサイクルより前のサイクルの観測，計算，移動の情報を持たず，現在のサイクルで得られた情報に基づいて計算を行う無記憶モデルを扱う．

3. 群

3.1 群の定義

集合 G が次の条件を満たすとき，群という．

- (1) G の任意の 2 つの元 a, b に対して，乗法，または積とよばれる演算 ab が定義されている． ab はまた G の元となる．
- (2) G の 3 つの元に対して，以下が成り立つ (結合法則)．

$$a(bc) = (ab)c$$

- (3) 単位元と呼ばれる元 e が存在し， G の任意の元 a に対して以下が成り立つ．

$$ae = ea = a$$

- (4) G の全ての元 a に対して， a の逆元と呼ばれる元 a^{-1} が存在し，以下が成り立つ．

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

3.2 同型

2 つの群 G, G' が次の条件を満たすとき， G と G' は同型であるという：

G から G' の上への 1 対 1 写像 ϕ が存在して，以下が成り立つ．

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

群 G と群 G' が同型であることを， $G \cong G'$ で表す．

3.3 部分群

群 G の部分集合 H が次の条件を満たすとき， H を G の部分群という．

$$(i) \ a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

$$(ii) \ a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

(i) と (ii) が成り立っていると， $a \in H \Rightarrow aa^{-1} \in H$ によって，単位元 e も H に属している．このことから， H 自身である．

3.4 2 面体群

まず平面上の正多角形について考える．正 p 角形を裏返さずに，自分自身に重ねる変換は，中心の周りの $\frac{2\pi}{p}$ だけの回転 a ，および，それを反復したものである． a を m 回反復したもの ($\frac{2\pi m}{p}$ の回転) を a^m で表し， e を恒等変換 (単位元) とすると，

$$e = a^0, a^1, a^2, \dots, a^{p-1}, (a^p = e)$$

という p 個の要素からなる可換群となる．

次に、正多角形が3次元空間内にあると考えると、この他に対称軸に沿って π だけ回転させ、その面を裏返す操作が加わる。この操作は合計で p 個あり、前の回転と合わせて、 $2p$ 個の要素からなる群となる。この群を、 p 位の2面体群といい、 D_p と表す。特に、 $p=2$ の場合には、4個の要素からなる可換群になる。

4. 平面合意問題

まずロボットの配置が正多面体を成す場合に、次の定理を与える。

定理 1. 3次元空間中に配置されているロボットからなる凸多面体が正多面体であるとき、ロボットを正多面体でない凸多面体を成す配置に移動させることができる。

一般に、ロボットの配置から形成される凸多面体に対して、次の定理を与える。

定理 2. 凸多面体を A とし、その頂点数を V とする。 A を A 自身に移す、中心まわりの回転からなる群を G_A とし、 G_A の部分群を、 H_A とする。(1) $G_A \cong D_2$ の場合、または、(2) $H_A \cong D_2$ 、かつ、 A を構成する面に正 k 角形が l 個存在し、 $\frac{V}{k} = l$ が成り立つような同じサイズの正 k 角形が存在する場合、全ての $a \in G_A$ に対して、 A を形成する全てのロボットの局所座標系が、 a による回転の前後で一致する局所座標系の定め方が存在する。

ロボットの配置が正多面体になっており、ロボットの数が正多面体の頂点数であると仮定する。このとき、ロボットをある平面に合意させるアルゴリズムを考える。また、 n ($4 \leq n \leq 10$) 台のロボットが任意の初期配置から平面を合意するアルゴリズムを与える。定理1より、正多面体は、面の中心、もしくは辺の中心から距離 $\epsilon > 0$ だけ手前に移動させることで、移動後のロボットが成す凸多面体が正多面体ではないことを用いる。正4面体の場合は、ロボットの移動パターンが3つに分けることができることから、平面を合意させる。 $n=4$ の場合は、4台のロボットが平面か、4面体のいずれかを成すことから、4面体の面の面積に関して場合分けを行うことで、平面を合意させる。 $n>5$ の場合は、ロボットが $n-1$ までの台数で平面合意することができることと、定理1を用いることで、平面を合意させることができる。ロボットの配置が、頂点数 $k \geq 4$ の凸多面体を成すとき、それぞれを k 多面体配置と表す。

4.1 ロボットが正4面体配置の場合

$|R|=4$ とし、4台のロボットの配置が、図2のような正4面体配置である場合を考える。まず、ロボットを辺の中点から距離 $\epsilon > 0$ だけ手前に移動させる。このとき、以下

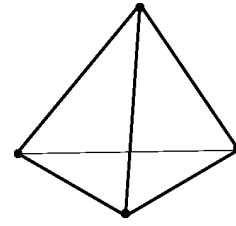


図2 正4面体配置

の場合に分けられる。

- (i) 1つの辺に2台のロボットが移動する (図3(a)).
- (ii) 2つの辺それぞれに2台のロボットが移動する (図3(b)).
- (iii) 全てのロボットが別々の辺に移動する (図3(c)).

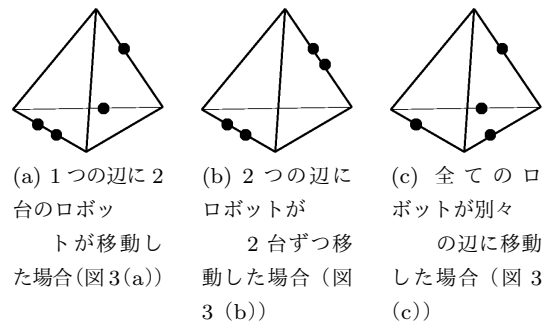


図3 正4面体配置からの移動

(i), (ii), (iii) のいずれの場合も、ロボットの成す凸多面体は、定理1より正4面体ではない。したがって、以下的一般の場合と同じようにすることで、正4面体を成すロボットを平面に合意させることができる。

4.2 4台のロボットの一般の配置の場合

4台のロボットが一般の配置である場合を考える。4台のロボットが4角形を成す場合には、既に平面を合意している。そうでなければ4台のロボットの配置は4面体を形成している。このとき、4面体の面の面積に関して以下の場合に分けられる。

- (i) 4つの面の面積が等しい。
- (ii) 3つの面の面積が等しい。
- (iii) 2つの面の面積が等しい。
- (iv) 全ての面の面積が異なっている。

(i) の場合、4面体は正4面体であるか、もしくは、図4のような等積4面体であるかのいずれかである。正4面体に関しては既に説明したので、等積4面体の場合を説明する。等積4面体は、直方体の4つの頂点から構成され、直方体の8つの頂点のうち互いに隣り合わない4つの頂点を結んでできた4面体である。よって対辺はねじれの位置にあり、等積4面体の性質から対辺の長さはそれぞれ等しい。よって各面の辺の長さが全て異なっているときには、長さ最大の辺の両端のロボットを1つの組とすると、正4面体

の(ii)の場合と同様である．各面が2等辺三角形のときには，底辺の両端のロボットを1つの組とすると，こちらも正4面体の(ii)の場合と同様である．

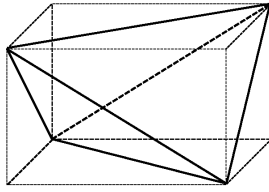


図4 等積4面体

(ii)の場合，3つの面の面積が等しいので，残りの1つの面の面積が異なっている．この面を構成していないロボットをこの面に対して垂直に移動させる．

(iii)の場合，どの2つの面の面積が等しい場合でも，2つの面は2台のロボットを共有している．2組の面の面積がそれぞれ等しい場合には，面積の大きい面の共有している2台のロボットに対して，正4面体の(i)と同様にする．

(iv)の場合，面積が最大の面に対して，その面を構成していないロボットが垂直に移動する．

したがって，任意の異なる配置の4台のロボットは平面を合意することができる．

4.3 5台のロボットの一般の配置の場合

$|R| = 5$ として，一般の配置の5台のロボットを平面に合意させる．5台のロボットの配置が，5角形を形成しているならば，既に平面は合意できている．そうでなければ5点からなる凸多面体は2種類しかなく[6]，それらは，4角錐(図5)，もしくは，6面体(図6)である．4角錐の場合は，四角形が1つ存在するので，四角形を構成していないロボットを四角形に対して，垂直に移動させる．5点からなる6面体は，次数3の頂点が3つと次数4の頂点が2つから構成される．よって，次数3の3台のロボットの配置から形成される三角形に残りの2台のロボットを移動させる．この2台のロボットを r_1, r_2 とする． r_1 と r_2 が三角形に対して対称な位置にあるとき， r_1 と r_2 をそれぞれに接続するいずれかの辺の中点に移動させる． r_1 と r_2 が三角形に対して対称な位置になれば，垂直に移動させる．対称な位置にある場合は， z 軸が三角形に対する法線ベクトルと平行，かつ， y 軸の正の方向が三角形の中心となるように r_1 と r_2 の局所座標系を変換する．このとき， r_1 と r_2 で x 軸の正の方向が逆になるので， x 軸の正の方向にある辺に移動する．したがって，任意の異なる配置の5台のロボットは，平面を合意することができる．

4.4 ロボットが正8面体配置の場合

$|R| = 6$ とし，6台のロボットの配置が，図7のような正8面体配置である場合を考える．ロボットを，対応する頂

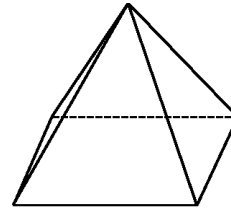


図5 4角錐

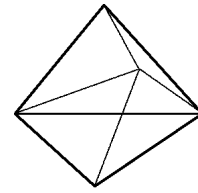


図6 6面体配置

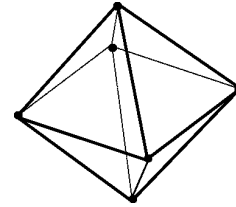


図7 正8面体配置

点に接続するいずれかの辺の中点から距離 $\epsilon > 0$ だけ手前に移動させる．定理1から，移動後のロボットが成す凸多面体は，正8面体ではない．したがって，以下の一般の場合と同じようにすることで，正8面体を成すロボットを平面に合意させることができる．

4.5 6台のロボットの一般の配置の場合

一般の配置の6台のロボットを考える．ロボットの配置が6角形を形成している場合は，既に平面が合意できている．5角形を形成している場合は，これは5角錐であるので，頭頂点であるロボットが5角形に対して垂直に移動することによって平面を合意することができる．

ロボットの配置から形成される多面体が構成面に4角形を含むとき，4角形が1つの場合は，その面に残りのロボットを移動させる．4角形が複数ある場合は，各ロボットをいずれかの4角形の中心から ϵ だけ手前に移動させる．このとき，ロボットの台数が6であるので，6台のロボットの成す凸多面体の面が全て4角形であることはない．明らかに，4角形の面の個数は，6より少ないので，少なくとも1つの4角形の面に2台のロボットが移動する．移動後のロボット間の距離によって，ロボットをグループに分ける．このとき，ロボットの間の距離が最大であるグループのロボットの台数は5台以下である．このとき，このグループのロボットを4，5台の場合のアルゴリズムによって，平面を合意することができる．例外として，図8のように，ロボットの配置によって正3角形が2つ存在し，かつ，各正3角形の中心を通る軸が2つの正3角形に垂直な場合を考える．このとき，このグループ分けによって，ロボットの台数が6台のままである場合がある．この場合は，2つの正3角形は平行であるので，最小包含球の中心を通り，これらの正3角形と平行な平面によって，平面を合意できる．このとき，2つの正3角形が，合意した平面に対して対称である場合は，各ロボットの局所座標を z 軸を正の方

向が、最小包含球の中心の向き、かつ、正3角形に対して垂直に、 y 軸の正の方向が正方形の中心になるように変換する。各ロボットを xy 平面に対して、 $\frac{\pi}{6}$ だけ移動させ、合意した平面に対して、ロボットを垂直に移動させる。

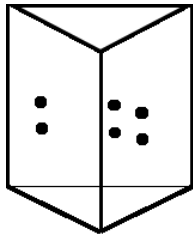


図 8 ロボットの配置が正3角柱を成し、移動後のロボット間の最大距離が全て等しい場合

全ての面が3角形の場合、正8面体は考える必要はないので、全ての辺が等しいことはない。各ロボットを対応する頂点に接続する辺のうちで最も長い辺に、接続する全ての辺の長さが等しければ、いずれかの辺にロボットを移動させる。移動後のロボット間の距離によって、ロボットをグループに分ける。このとき、ロボット間の距離が最大であるグループのロボットの台数は5台以下である。この場合においても、4, 5 台の場合のアルゴリズムを用いることで、ロボットは平面を合意することができる。したがって、一般の配置の6台のロボットは、平面を合意することができる。

4.6 7台のロボットの一般の配置の場合

$|R| = 7$ とし、一般の配置の7台のロボットを平面に合意させる。7台のロボットの配置が形成する凸多面体の頂点数が最大の面を考える。頂点数が最大の面が1つの場合は、その面の頂点となっていないロボットをその面に移動させる。図9のように、頂点数が最大の面が複数存在する場合は、各ロボットに集まる、頂点数が最大の面のいずれかに、中心から ϵ だけ手前にロボットを移動させる。頂点数が最大の面の頂点の端点となっていないロボットは、自身の頂点に集まっているいずれかの面に移動する。全ての面が4角形であるような7面体は存在しないので、全ての面が3角形である場合を除いて、ロボットの台数より頂点数が最大の面の個数は少ない。したがって、少なくとも1つの面に複数のロボットが移動する。移動後のロボット間の距離によってロボットをグループに分ける。このとき、ロボット間の距離が最大であるグループのロボットの台数は6台以下である。全ての面が3角形である場合を除いて、平面を合意できる。

次に、全ての面が3角形である場合は、ロボットの台数は、正6面体の頂点数より多いので、ロボットの凸包の次数が異なる頂点が存在する。よって、次数によって、ロボットをグループに分ける。すると、次数が最大のグルー

プのロボットの台数は、6台以下となり、平面を合意できる。したがって、7台の一般の配置のロボットは、平面を合意することができる。

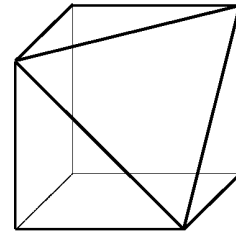


図 9 頂点数が最大の面が複数存在する場合

4.7 ロボットが正6面体配置の場合

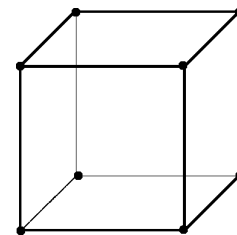


図 10 正6面体配置

$|R| = 8$ とし、8台のロボットの配置、図10のような正6面体（立方体）が形成するとする。ロボットをいずれかの面の中心から距離 $\epsilon > 0$ だけ手前に移動させると、定理1から、移動後のロボットの成す凸多面体は、正6面体ではない。したがって、以下の一般の場合と同じようにすることで、正6面体を成すロボットを平面に合意させることができる。

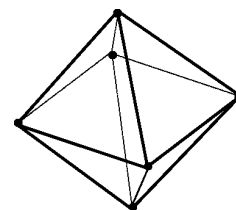


図 11 ロボットの配置が正4角柱を成し、移動後のロボット間の最大距離が全て等しい場合

4.8 8台のロボットの一般の配置の場合

8台のロボットの一般の配置の場合を考える。8台のロボットの配置が形成する凸多面体の頂点数が最大の面を考える。頂点数が最大の面が1つの場合は、その面の頂点となっていないロボットがその面に移動する。頂点数が最大の面が複数存在する場合は、頂点数が最大の面の頂点の端点となっているロボットは、頂点数が最大の面のいずれかに、中心から距離 $\epsilon > 0$ だけ手前に移動する。頂点数が最

大の面の頂点の端点になっていないロボットは、自身が頂点となっているいずれかの面に移動する。全ての面が5角形であるような8面体は存在しないので、ロボットの台数より頂点数が最大の面の個数は少ない。したがって、少なくとも1つの面に複数のロボットが移動する。移動後のロボット間の距離によって、ロボットをグループに分ける。このとき、ロボットの間の距離が最大であるグループのロボットの台数は7台以下であるので平面を合意できる。

例外は、移動後のロボットの配置が成す凸多面体の全ての面が、3角形、または、4角形である場合と、図11のように、ロボットの配置によって正方形が2つ存在し、かつ、各正方形の中心を通る軸が2つの正方形に垂直な場合である。このとき、このグループ分けによって、ロボットの台数が6台のままである場合がある。移動後のロボットの配置が成す凸多面体の全ての面が、3角形、または、4角形である場合は後述する。

ロボットの配置によって正方形が2つ存在し、かつ、各正方形の中心を通る軸が2つの正方形に垂直な場合を考える。2つの正方形は平行であるので、最小包含球の中心を通り、これらの正方形と平行な平面によって、平面を合意できる。このとき、2つの正方形が、合意した平面に対して対称である場合は、各ロボットの局所座標を z 軸を正の方向が、最小包含球の中心の向き、かつ、正方形に対して垂直に、 y 軸の正の方向が正方形の中心になるように変換する。各ロボットを xy 平面に対して、 $\frac{\pi}{8}$ だけ移動させる。そして、合意した平面に対して、ロボットを垂直に移動させる。

次に、全ての面が3角形である場合は、ロボットの台数は、正8面体の頂点数より多いので、ロボットの凸包の次数が異なる頂点が存在する。したがって、次数によってロボットをグループに分けると、次数が最大のグループのロボットの台数は、7台以下となり、平面を合意できる。

最後に、全ての面が4角形である場合は、8台のロボットの配置から形成されるのは、6面体であるので、正6面体の場合と同様にロボットをいずれかの面の中心から距離 $\epsilon > 0$ だけ手前に移動させ、8台のロボットの一般の配置の場合を繰り返す。6面体は、頂点数が面数より多いので、少なくとも1つの面にロボットが2台以上集まる。よって、ロボットの移動の前後でロボットは、同じ凸多面体を形成することはない。したがって、8台の一般の配置の場合に平面を合意することができる。

4.9 9台のロボットの一般の配置の場合

$|R| = 9$ とし、任意の異なる配置の9台のロボットを平面に合意させる。8台の場合と同様にする。ただし、全ての面が3、または、4角形である場合は、ロボットの凸包の次数の異なる頂点が必ず存在するので、次数によってロボットをグループに分ける。すると、次数が最大のグルー

プのロボットの台数は、8台以下となる。したがって、8台までの平面合意アルゴリズムを用いて、平面を合意し、その後、他のロボットがその平面へ移動することで、9台の一般の配置のロボットは、平面を合意することができる。

4.10 10台のロボットの一般の配置の場合

$|R| = 10$ の場合も、 $|R| = 9$ の場合と同様にすることで平面を合意することができる。

例外は、ロボットが図12のような、正5角柱を成すときに、2つの正5角形に、ロボットが5台ずつ移動する場合である。このとき、各ロボットの局所座標系を、 z 軸を正の方向が、正5角柱の中心の向き、かつ、正5角形に対して垂直に、 y 軸の正の方向が正5角形の中心になるように変換する。ロボットが成す2つの正5角形の中心まわりに、 $\frac{\pi}{10}$ だけ回転させ、最小包含球の中心を通り、かつ、各正5角形に平行な平面に対して、ロボットを垂直に移動させる。よって、10台の一般の配置のロボットは、平面を合意することができる。

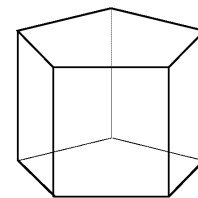


図12 正5角柱

4.11 ロボットが正12面体配置の場合

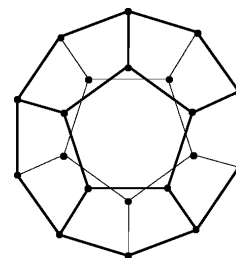


図13 正12面体配置

$|R| = 20$ とし、20台のロボットの配置が、図13のような正12面体を形成するとする。定理1から、まずロボットを、ロボットがいる頂点に集まるいずれかの面の中心から距離 $\epsilon > 0$ だけ手前に移動させる。次に、ロボット間の距離の最小値 d を計算し、各ロボットから距離が d のロボットの台数を計算する。この台数を重みとして、 r_i に対して、 w_i とする。ロボットの移動後に、もとの正12面体の1つの面に集まるロボットの最大数は、2, 3, 4, 5台のいずれかである。後述の場合を除いて、もとの正12面体の各面に移動するロボットの台数が全て等しくなることはないの

で、各 w_i が等しくなることはない。したがって、 w_i が最大のロボットの台数は、明らかに 19 台以下である。このとき、 w_i が最大のロボットの台数が、10 台より多い場合は、それ以外のロボットの台数が 10 台以下である。まず、これらのロボットは 10 台までのロボットに平面を合意させるアルゴリズムを用いて、平面を合意し、その後、他のロボットがその平面に移動する。

例外は、図 14 に示すように、ロボットが各面に 2 台ずつ移動したとき、全てのロボットの重みが等しくなる場合である。この場合は、もとの正 12 角形の辺の両端のロボットが、組になっている。これらの辺の、それぞれ 2 つずつが対辺になっており、これらの辺は頂点を共有しない。このとき、移動後のロボットは、4 つの正 5 角形を成し、これらは全て平行であり、最小包含球の中心を通り、かつ、これらの正 5 角形と平行で中心を通る平面を一意に合意できる。また、4 つの正 5 角形は、合意した平面に対して、面対称でない。よって、合意した平面上の異なる点を移動先として選ぶことができる。したがって、ロボットの配置が正 12 面体を形成している場合に、ロボットは平面を合意できる。

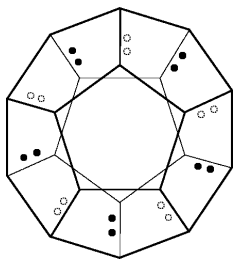


図 14 全てのロボットの重みが等しくなる場合

4.12 ロボットが正 20 面体配置の場合

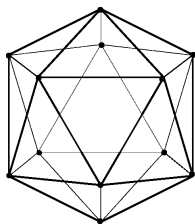


図 15 正 20 面体配置

$|R| = 12$ とし、12 台のロボットの配置が、図 15 のような正 20 面体が形成するとする。定理 1 から、まずロボットを接続するいずれかの辺の中点から距離 $\epsilon > 0$ だけ手前に移動させる。このとき、6 つの辺にロボットが 2 台ずつ移動した場合を考える。図 16 に示すように、6 つの辺のうち、2 つずつの辺がそれぞれ対辺であり、かつ、対辺の中心を結んでできる 3 本の直線が直交する場合、ロボットの配置が形成する凸多面体は、定理 8 を満たす。よって、最

悪時の局所座標系の配置であるときは、正 20 面体の場合には、定理 2 から平面を合意することができない。

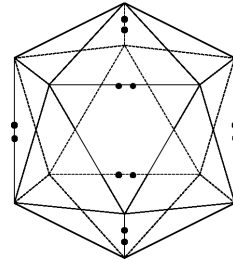


図 16 ロボットが 6 つの辺に 2 台ずつ移動した場合

ロボットの配置から形成される凸多面体が、 $|V| < |F|$ である場合に、定理 1 を用いたアルゴリズムにおいて、完全同期モデルの無記憶ロボットについて次の定理を得る。

定理 3. ロボットの配置から形成される凸多面体が、 $|V| < |F|$ であるとする。凸多面体を自分自身に移す、中心まわりの回転からなる群に対して、 D_2 と同型の部分群 H が存在し、かつ、ある整数 k について、 $\frac{|V|}{6} = 2k$ である場合、この凸多面体を形成するロボットは、平面を合意することができない。

5. おわりに

本論文では、完全同期モデルを用い、無記憶ロボットに対する平面合意問題に取り組んだ。ロボットが正多面体を成す場合に、局所座標系と配置の双方を考慮することで、ロボット群の持つ対称性が低いことを示し、ロボットが正 20 面体以外の正多面体を成す場合には、平面を合意することができることを示した。ロボットの配置が成す凸多面体が、回転群、頂点数と面について、ある関係を満たす場合に、平面を合意することができないことを示した。

今後の課題のひとつに、準同期、非同期モデルのロボットに対する、平面合意問題を解くアルゴリズムの設計が挙げられる。より強力な平面合意のアルゴリズムが存在するのか、また、3 次元パターンの形成問題も今後の課題である。

参考文献

- [1] I. Suzuki, and M. Yamashita, Distributed anonymous mobile robots: Formation of geometric patterns. SIAM Journal on Computing, 28 (1999), pp.1347–1363.
- [2] P. Flocchini, G. Prencipe, and N. Santoro, Distributed Computing by Oblivious Mobile Robots, Morgan and Claypool Publishers, 2012.
- [3] M. ドバーク, O. チョン, M. ファン クリベルド, M. オーバマーズ, 浅野哲夫 (訳), コンピュータ・ジオメトリ - 計算機科学: アルゴリズムと応用 (第 3 版), 近代科学社, 2010.
- [4] 志賀浩二, 群論への 30 講, 朝倉書店, 1989.
- [5] 一松信, 正多面体を解く, 東海大学出版会, 2002.

- [6] H.T. クロフト, K.J. ファルコナー, R.K. ガイ, 秋山仁
(訳), 幾何学における未解決問題集, シュプリンガー・
フェアラー東京, 1996.