

# 頂点削除による2部グラフの区間グラフ化問題

江藤 宏<sup>1,a)</sup> 宮野 英次<sup>2,b)</sup>

**概要:** 頂点削除による区間グラフ化問題はグラフ  $G = (V, E)$  が与えられたとき、頂点部分集合  $S \subseteq V$  をグラフより削除することにより、グラフ  $G(V - S)$  が区間グラフとなり、かつ、削除する頂点数が  $k$  以下となるような頂点集合  $S$  を見つけ出す問題である。また、頂点削除による単一区間グラフ化問題は、 $G(V - S)$  が単一区間グラフとなるような頂点集合を見つける問題である。一般グラフを入力とした場合には、両問題は NP 困難であることがすでに知られている。本稿では、入力グラフを2部グラフ限定したとしても、両問題が NP 困難であることを示す。

**キーワード:** 頂点削除問題, 区間グラフ, 単一区間グラフ, 2部グラフ

## Interval Vertex Deletion for Bipartite Graphs

HIROSHI ETO<sup>1,a)</sup> EIJI MIYANO<sup>2,b)</sup>

**Abstract:** Given a graph  $G = (V, E)$ , the Interval Vertex Deletion problem is to decide whether, by deleting a subset  $S \subseteq V$  of at most  $k$  vertices from  $G$ , the input graph can be turned into an interval graph  $G(V - S)$ . Also, the Unit-Interval Vertex Deletion problem is to decide whether the input graph can be turned into a unit-interval graph  $G(V - S)$  by deleting a subset  $S \subseteq V$  of at most  $k$  vertices. It is known that both problems are NP-hard for general graphs. In this paper, we show that the problems are still NP-hard even if the input graph is a bipartite graph.

**Keywords:** Vertex-deletion, Interval graph, Unit interval graph, Bipartite graph

### 1. はじめに

本稿では、自己ループや多重辺を持たない単純グラフのみを考える。頂点集合  $V(G)$ 、辺集合  $E(G)$  とする時、無向単純グラフを  $G = (V(G), E(G))$  とする。また、 $|V(G)| = n$  とする。  $V(G_S) \subseteq V(G)$  かつ  $E(G_S) \subseteq E(G)$  であるとき、 $G_S$  はグラフ  $G$  の部分グラフとなる。頂点の部分集合  $S \subseteq V(G)$  を考えたとき、グラフ  $G$  において頂点集合  $S$  を削除したグラフ  $G[V - S]$  は  $V - S$  により誘導された  $G$  の誘導部分グラフを表す。

入力グラフの頂点削除により、ある特徴を持ったグラフ

に変換する問題をグラフ化問題と総称することにする。グラフ化問題において、頂点削除に関して遺伝性を持つ特徴  $\Pi$  へのグラフ化問題は Leiw と Yannakakis によってすでに NP 困難であることが示されている [2]。ここで、頂点削除に関する遺伝性特徴とは、頂点削除前のグラフが特徴  $\Pi$  を持っていた時に、任意の頂点を削除した後のグラフが特徴  $\Pi$  を保持することができるような特徴のことである。例えば、グラフの平面性を考える。あるグラフが平面グラフであったとすると、任意の頂点を削除したとしても、頂点削除後に得られたグラフも必ず平面グラフのままである。よって、平面性は遺伝性を持つ特徴であると言える。

与えられた入力グラフの中から、指定したグラフの特徴  $\Pi$  を有した最大誘導部分グラフを探索する問題のクラス (MAXIMUM INDUCED SUBGRAPH WITH PROPERTY  $\Pi$ ,  $\text{MaxIS}_{\Pi}$ ) について古くから多くの研究がある (文献 [1] の

<sup>1</sup> 九州工業大学大学院情報工学府, 〒 820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4

<sup>2</sup> 九州工業大学大学院情報工学研究院, 〒 820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4

a) eto@theory.ces.kyutech.ac.jp

b) miyano@ces.kyutech.ac.jp

[GT21]) .  $\text{MaxIS}_\Pi$  はできるだけ大きな誘導グラフを求める問題であるが、本質的には、できるだけ少ない頂点を削除することで特徴  $\Pi$  を持った部分グラフを残すという問題と同一の問題、すなわち、双対問題となる。

### 1.1 区間グラフ化問題

本稿では、グラフの特徴として区間性と単一区間性を考える。区間グラフの定義は以下である。

**定義 1** グラフ  $G = (V, E)$  に対して、実直線上の閉区間集合  $\mathcal{I}$  で以下の条件を満たすものが存在するとき、 $G$  を区間グラフと呼ぶ。

- $V$  と  $\mathcal{I}$  の間に 1 対 1 対応が存在する。
- 2 頂点  $u, v \in V$  に対して 2 つの閉区間  $I_u, I_v \in \mathcal{I}$  がそれぞれ対応しているとする。  $I_u \cap I_v \neq \emptyset$  が成り立つ場合に限り、 $G$  において対応する  $u, v$  の間に辺  $(u, v) \in E$  が存在する。

単一区間グラフは閉区間の長さがすべて等しい場合の区間グラフである。

**定義 2** グラフ  $G = (V, E)$  に対して、実直線上の閉区間集合  $\mathcal{I}$  で以下の条件を満たすものが存在するとき、 $G$  を単一区間グラフと呼ぶ。

- $V$  と  $\mathcal{I}$  の間に 1 対 1 対応が存在する。
- 閉区間  $I_i$  の長さを  $|I_i|$  とするとき、すべての  $1 \leq i, j \leq |V|$  について、 $|I_i| = |I_j|$  である。
- 2 頂点  $u, v \in V$  に対して 2 つの閉区間  $I_u, I_v \in \mathcal{I}$  がそれぞれ対応しているとする。  $I_u \cap I_v \neq \emptyset$  が成り立つ場合に限り、 $G$  において対応する  $u, v$  の間に辺  $(u, v) \in E$  が存在する。

頂点削除による区間グラフ化問題、および単一区間グラフ化問題として以下のように定式化する。

頂点削除による区間グラフ化問題 (VID)

入力: グラフ  $G = (V, E)$ 。

目的: 頂点の部分集合  $S \subseteq V$  について  $G[V-S]$  が区間グラフとなり、 $k \geq |S|$  となるような頂点集合  $S$  が存在するか。

頂点削除による単一区間グラフ化問題 (VUID)

入力: グラフ  $G = (V, E)$ 。

目的: 頂点の部分集合  $S \subseteq V$  について  $G[V-S]$  が単一区間グラフとなり、 $k \geq |S|$  となるような頂点集合  $S$  が存在するか。

### 1.2 従来研究および本論文の結果

前述のように、一般グラフにおいて、遺伝性を持つ特徴  $\Pi$  を有するグラフへの頂点削除問題は NP 困難であることがすでに知られている [2]。区間グラフの閉区間表現を考えた場合に、ある頂点の削除は閉区間集合からのある閉区間の削除に対応しており、区間性が遺伝性を持つことは明らかである。また、単一区間グラフについても同様に遺伝性を持つ。このことから、入力を一般グラフとした場合には、VID 問題および VUID 問題は NP 困難であることがわかる。

本稿では、入力グラフを 2 部グラフに限定したとしても、VID 問題、および VUID 問題はともに NP 困難のままであることを示す。

## 2. VID 問題および VUID 問題の計算複雑さ

本節において、2 部グラフにおける VID 問題および VUID 問題の計算複雑さを双対問題である区間誘導部分グラフ探索問題および、単一区間誘導部分グラフ探索問題に置き換え、両問題の計算複雑さについて証明を行う。

### 2.1 VID 問題および VUID 問題の双対問題

頂点削除する頂点の集合を  $S$  とする時、グラフ  $G(V-S)$  は頂点集合  $V-S$  における頂点間の辺をすべて含み、頂点集合  $S$  と頂点間の辺をすべて含まないグラフであるため、グラフ  $G(V-S)$  は誘導部分グラフとなる。頂点集合  $S$  の頂点数が  $|S| \leq k$  である時、 $V-S = S'$  とすると  $|S'| = |V-S| \geq |V| - k = k'$  となるため、以下のように双対問題として置き換えることが出来る。

#### VID 問題の双対問題

区間誘導部分グラフ探索問題

入力: グラフ  $G = (V, E)$ 。

目的: 頂点の部分集合  $S' \subseteq V$  について  $G[S']$  が区間グラフとなり、 $k \leq |S'|$  となるような頂点集合  $S'$  が存在するか。

#### VUID 問題の双対問題

単一区間誘導部分グラフ探索問題

入力: グラフ  $G = (V, E)$ 。

目的: 頂点の部分集合  $S' \subseteq V$  について  $G[S']$  が単一区間グラフとなり、 $k \leq |S'|$  となるような頂点集合  $S'$  が存在するか。

### 2.2 2 部グラフにおける区間誘導部分グラフ及び、単一区間誘導部分グラフ

頂点数 3 以下のグラフはすべて区間グラフおよび単一区

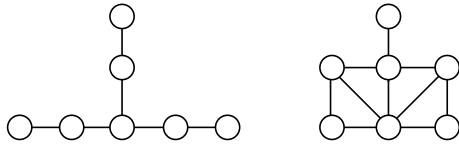


図 1  $T_2$  および  $XF_{31}$

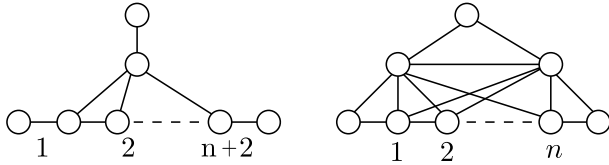


図 2  $XF_2^{n+1}$  および  $XF_3^n$

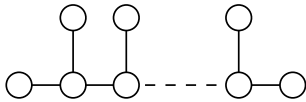


図 3 2部グラフにおける区間誘導部分グラフ

間グラフであるため、4 頂点以上について考える。

2 部グラフは偶数長の閉路のみ持つグラフである。言い換えると、 $n \geq 0$  において、 $C_{2n+3}$  となる誘導部分グラフを持たないグラフである。また、区間グラフは同様に  $C_{n+4}$ ,  $T_2$ ,  $XF_2^{n+1}$ ,  $XF_3^n$  となる誘導部分グラフのないグラフである。よって、2 部グラフであり、かつ、区間グラフであるグラフは  $C_{n+3}$  と  $T_2$  となる誘導部分グラフのないグラフであることが言える。この 2 部グラフにおける区間グラフは図 3 のように葉とパスからなるグラフである。よって、2 部グラフにおいて頂点削除による区間グラフ化問題はパスと葉からなるグラフを探索する問題である。

また、単一区間グラフは区間グラフにさらに  $K_{3,1}$  となる誘導部分グラフを持たないグラフであるので、2 部グラフにおける単一区間グラフはパスとなる。よって、2 部グラフにおいて頂点削除による単一区間グラフ化問題はパスを探索する問題である。

### 2.3 VIS 問題の計算複雑さ

本節では、VIS 問題の計算複雑さを定理 1 を用いて示す。

**定理 1** 入力を最大次数 3 の 2 部グラフにおいて、区間誘導部分グラフ探索問題は NP 困難である。

定理 1 より系 1 を得ることが出来る。

**系 1** 入力を最大次数 3 の 2 部グラフにおいて、VIS 問題は NP 困難である。

**定理 2** [3] 3-正則グラフにおいて、ハミルトンパス探索問題は NP 完全である。

定理 2 からの多項式時間帰着により定理 1 を証明する。帰着方法及び、証明を以下に示す。

グラフ  $G = (V, E)$  とする時、頂点集合を  $V(G)$ 、辺集合を  $E(G)$  とする。この時、帰着グラフ  $H = (V(H), E(H))$  は以下のような構造になる。

- グラフ  $G$  における各辺  $e_1, e_2, \dots, e_m$  に応じて、グラフ  $H$  は  $m$  個の辺ガジェット  $G_{e_1}, G_{e_2}, \dots, G_{e_m}$  とする。また、 $1 \leq j \leq m$  において、 $j$  番目の辺ガジェットを  $G_{e_j}$  とする。
- 辺ガジェット  $G_{e_j}$  は頂点  $a_j$  および  $b_j$  より成り、各辺ガジェットにおける頂点  $a$  および  $b$  の集合それぞれ  $V(A) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  と  $V(B) = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  とする。帰着グラフ  $H$  の頂点集合は  $V(H) = V(G) \cup G(A) \cup G(B)$  となる。
- グラフ  $G$  の辺  $e_j = (v_i, v_k)$  とする時、帰着グラフ  $H$  において、頂点  $v_i$  及び  $v_j$  はガジェット  $G_{e_j}$  の頂点  $a_j \in V(G_{e_j})$  と連結している。また、頂点  $b_j$  は頂点  $a_j$  とのみ連結している。

グラフ  $H$  において、頂点集合  $V(G)$  と  $V(B)$  はそれぞれ独立であり、また、頂点集合  $V(B)$  の頂点同士も独立であることから、グラフ  $H$  は明らかに 2 部グラフである。さらに、グラフ  $G$  からの帰着であるため  $V(G)$  の次数は 3、 $V(A)$  の次数も帰着の条件より 3 となる。また、 $V(B)$  の次数は 1 となるため、帰着グラフ  $H$  は最大次数 3 の 2 部グラフである。

帰着された 2 部グラフ  $H$  おける一つの区間誘導部分グラフは、葉となる頂点とパスになる頂点を持つ。グラフ  $H$  において、 $i$  番目の誘導部分グラフにおける葉となる頂点の総和をそれぞれ  $Vl_i, Al_i, Bl_i$ 、パスとなる頂点の総和  $Vp_i, Ap_i, Bp_i$  とする。区間誘導部分グラフの数を  $p$  とした時、頂点数の総和  $S'$  は式 (1) となる。

$$S' = \sum_{i=1}^p (Vl_i + Al_i + Bl_i + Vp_i + Ap_i + Bp_i) \quad (1)$$

頂点  $b_i \in V(B)$  は次数が 1 であるため、 $b_i$  が頂点  $a_i \in V(A)$  と連結しない時、1 頂点のみの区間誘導部分グラフになる。また、 $b_i$  が  $a_i$  と連結する時、区間誘導部分グラフの葉にしかない。そのため、 $b_i$  は頂点  $a_i$  が葉となる時を除いて、区間誘導部分グラフとなる。よって、 $V(B)$  において小路となる頂点は存在しないため、 $\sum_{i=1}^p Bp_i = 0$  なる。また、葉となる  $V(B)$  の総和は  $\sum_{i=1}^p Bl_i \leq |B_H| - \sum_{i=1}^p Al_i$  となる。

$$\begin{aligned} S' &\leq \sum_{i=1}^p (Vl_i + Al_i + Vp_i + Ap_i) + |B_H| - \sum_{i=1}^p Al_i \\ &= \sum_{i=1}^p (Vl_i + Vp_i + Ap_i) + |B_H| \end{aligned} \quad (2)$$

また、頂点  $v_i \in V$  が葉となる時、1 つの区間誘導部分グラフにおいて最大で 2 頂点が葉となる。なぜならば、葉となる頂点  $v_i$  が 3 つ以上存在する時、誘導部分グラフ  $T_2$  を

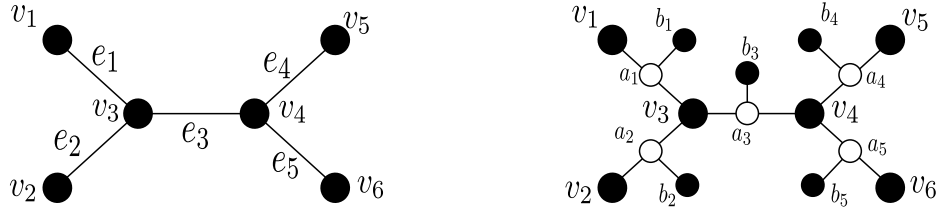


図 4 グラフ G および帰着グラフ H

持つことになる．また，1つの区間誘導部分グラフにおいて，葉となる頂点は1または0である時，頂点集合  $V(A)$  の頂点が少なくとも1つが葉となため，頂点集合  $V(B)$  の頂点を損する．よって，1つの区間誘導部分グラフにおいて葉となる頂点集合  $V$  の頂点は2つとなるため，頂点  $V$  の総和は  $\sum_{i=1}^p V l_i = \sum_{i=1}^p 2$  となる．

$$\begin{aligned} S' &\leq \sum_{i=1}^p (V l_i + V p_i + A p_i) + |B_H| \\ &\leq \sum_{i=1}^p (V p_i + A p_i + 2) + |B_H| \end{aligned} \quad (3)$$

式 (3) より頂点集合  $V(A)$  および  $V$  において，パスとなる頂点によって区間グラフの頂点数が変わる．よって，グラフ G においてハミルトンパスは頂点  $n$  と辺数は  $n-1$  であるため，グラフ H において， $\sum_{i=1}^p (V p_i + A p_i + 2) = n + (n-1)$  となり，区間誘導部分グラフの総和  $|S'| = n + (n-1) + \frac{3}{2}n = \frac{7}{2}n - 1$  なる．グラフ G においてハミルトンパスをとらない時， $\sum_{i=1}^p (V p_i + A p_i + 2) \leq n + (n-2)$  となるため， $|S'| \leq n + (n-2) + \frac{3}{2}n = \frac{7}{2}n - 2$  となる．

よって，頂点数  $\frac{7}{2}n - 1$  以上のグラフが存在するかの判定はハミルトンパス探索問題からの帰着により行える．ゆえに，区間誘導部分グラフ探索問題は NP 困難である．

このことより，最大次数 3 の 2 部グラフにおいて，VIS 問題は NP 困難である．

## 2.4 単一区間グラフの計算複雑さ

第 2.3 節の帰着方法により定理 3 を示すことができる．同様に VUID 問題は NP 困難であると言える．この時，帰着した 2 部グラフ H における各ガジェット  $G_e$  は頂点  $b$  を除いた頂点  $a$  のみからなるグラフである．証明は省略．

**定理 3** 入力を最大次数 3 の 2 部グラフにおいて単一区間誘導部分グラフ探索問題は NP 困難である．

定理 3 より系 2 を得ることが出来る．

**系 2** 入力を最大次数 3 の 2 部グラフにおいて，VUIS 問題は NP 困難である．

## 謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金 26330017 による．

## 参考文献

- [1] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability* (1979)
- [2] J. M. Lewis and M. Yannakakis. The node-deletion problem for hereditary properties is NP-complete. *Journal of Computer and System Sciences*, 20(2), pp.219-230, 1980.
- [3] A. Takanori, N. Takao and S. Nobuji. NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem for bipartite graphs. In *Proc. IPSJ* 1980, vol. 3, No. 2, 1980.