

弦2部グラフにおける正則誘導部分グラフ探索問題

朝廣 雄^{1,a)} 江藤 宏^{2,b)} 伊藤 健洋^{3,c)} 宮野 英次^{4,d)}

概要: 本稿では, グラフ $G = (V, E)$ と指定次数 r が与えられたとき, 頂点部分集合 S によって誘導される部分グラフ $G[S]$ が指定した次数 r の正則グラフであり, 頂点数が最大となるような S を見つけ出す最適化問題を考える. また, グラフ $G[S]$ が r -正則, かつ連結グラフである場合についても考える. 両問題は, 入力グラフを2部グラフに限定しても, 近似することさえ NP 困難であることが知られている. 本稿では, 木構造を持つ弦2部グラフに限定した時, 両問題が多項式時間で解くことが出来ることを示す.

Regular Induced Subgraph Problems for Chordal Bipartite Graphs

Abstract: We study the problem of finding a maximum vertex-subset S of a given graph G such that the subgraph $G[S]$ induced by S is r -regular for a prescribed degree $r \geq 0$. We also consider a variant of the problem which requires $G[S]$ to be r -regular and connected. Both problems are known to be NP-hard even to approximate for bipartite graphs. In this paper, we give polynomial time algorithms to solve the problems for chordal bipartite graphs.

1. はじめに

与えられた入力グラフの中から, 指定したグラフの特徴 Π を有した最大誘導部分グラフを探索する問題 (MAXIMUM INDUCED SUBGRAPH WITH PROPERTY Π , MaxIS_{Π}) については古くから多くの研究がある (文献 [?] の [GT21]):

特徴 Π を持つ最大誘導連結部分グラフ探索問題 (MaxIS_{Π})
入力: グラフ $G = (V, E)$ と特徴 Π .
目的: 頂点の部分集合 $S \subseteq V$ によって誘導される部分グラフ $G[S]$ が特徴 Π を持ち, 頂点数が最大となるような頂点部分集合 S を見つける.

適切な特徴 Π を指定することにより, 多くのグラフ最適化問題を MaxIS_{Π} として形式化することができ, 本問題は非常に多くのグラフ最適化問題を含んでいる. 例えば, 特徴 Π が「部分グラフが2部グラフ」の場合は, 与えられた

グラフ G のから頂点数が最大の誘導2部グラフを探索する問題となる. また, 「部分グラフが完全グラフ」とした場合には, 代表的なグラフ最適化問題である最大クリーク探索問題となる. このように MaxIS_{Π} は, グラフ理論および組み合わせ最適化の分野において基本的な問題の一つであり, 幅広く研究が行われている. しかし, 残念ながら, 多くの興味深い特徴については NP 困難となることが知られている. 例えば文献 [?] において, Lund と Yannakakis は非巡回性や, 平面性, 2部グラフ性, 次数限定, 弦グラフ性などの誘導部分グラフに対する遺伝性を持った特徴について, MaxIS_{Π} 問題は近似することさえ NP 困難であることを示している.

1.1 問題設定

本稿では, 基本的なグラフの特徴として正則性を考える. 各頂点より出ている辺の数を次数といい, すべての頂点の次数が正確に r であるグラフを r -正則グラフと呼ぶ. 正則性は, グラフにおける主要な特徴の一つである. すなわち, 本論文で考える最大 r -正則誘導部分グラフ探索問題 (以下では r -MaxRIS) は以下のように定式化できる.

¹ 九州産業大学情報科学部 〒 813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1
² 九州工業大学大学院情報工学府 〒 820-8502 飯塚市川津 680-4
³ 東北大学大学院情報科学研究科 〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05
⁴ 九州工業大学大学院情報工学研究院 〒 820-8502 飯塚市川津 680-4
a) asahiro@is.kyusan-u.ac.jp
b) eto@theory.ces.kyutech.ac.jp
c) takehiro@ecei.tohoku.ac.jp
d) miyano@ces.kyutech.ac.jp

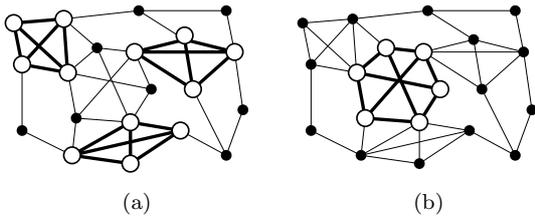


図 1 (a) 3-MaxRIS および (b) 3-MaxRICS の最適解.

最大 r -正則誘導部分グラフ探索問題 (r -MaxRIS)

入力: グラフ $G = (V, E)$.

目的: 頂点の部分集合 $S \subseteq V$ によって誘導される部分グラフ $G[S]$ が r 正則であり, 頂点数が最大となるような S を見つける.

グラフ G における r -MaxRIS の最適解を $\text{OPT}_{\text{RIS}}(G)$ とする. 例えば, 3-MaxRIS の入力として図 ??(a) を考える. このとき, 白い頂点からなる 3 つの部分グラフは 12 頂点であるため, $\text{OPT}_{\text{RIS}}(G) = 12$ となる. $r = 0$ や $r = 1$ とした場合の r -MaxRIS は, それぞれ, 独立頂点集合問題 ?, GT20 や最大誘導マッチング問題 ? と同一の問題である.

本稿では, 正則性に加え誘導部分グラフ $G[S]$ の頂点がすべて連結である “連結性” を条件として部分グラフを探索する問題についても考える. これは, r -MaxRIS と同様に特徴 II を有する最大誘導連結部分グラフ探索問題 ?, GT22 の特別な場合である.

最大 r -正則誘導連結部分グラフ探索問題 (r -MaxRICS)

入力: グラフ $G = (V, E)$.

目的: 頂点の部分集合 $S \subseteq V$ によって誘導される部分グラフ $G[S]$ が r 正則で連結となり, 頂点数が最大となるような S を見つける.

グラフ G における r -MaxRICS の最適解を $\text{OPT}_{\text{RICS}}(G)$ とする. 例えば, 3-MaxRICS の入力として図 ??(b) を考えたとき, 白い頂点からなる部分グラフは 6 頂点であり, $\text{OPT}_{\text{RICS}}(G) = 6$ となる. また, 次数 $r = 0$ および $r = 1$ における r -MaxRICS はそれぞれグラフから 1 頂点, 1 辺を探索する問題であり自明な問題となる. それに対して, 2-MaxRICS は, 最長誘導閉路探索問題として知られており, NP 困難問題である ?.

1.2 従来研究

r -MaxRIS および r -MaxRICS はよく知られた問題を含んでおり, 広く研究が行われている. 以下では n を入力グラフの頂点数とし, さらに $P \neq NP$ と仮定する.

上で述べたように, r -MaxRIS の中で最も重要で, 多くの研究が行われている問題として, 最大独立集合問題 (0-MaxRIS) および最大誘導マッチング問題 (1-MaxRIS) である. しかし, 残念ながら, 両問題は入力グラフが一般グラフであるとき, NP 困難であることが知られている. Hästad は文献 ?において 0-MaxRIS が任意の定数 $\epsilon > 0$ について,

$n^{1/2-\epsilon}$ よりも良い近似率を持つ多項式時間アルゴリズムが存在しないことを示している. Orlovich らは, 文献 ?で 1-MaxRIS が $n^{1/2-\epsilon}$ 近似困難であることを示している. さらに, 文献 ?において $r \geq 3$ の場合においても Cardoso, Kamiński, Lozin は r -MaxRIS が NP 困難であることを示している. さらに, Asahiro, Eto, Miyano は文献 ?において, $r \geq 3$ の場合における r -MaxRICS が, 任意の定数 $\epsilon > 0$, について, $n^{1/6-\epsilon}$ よりも良い近似率を持つ多項式時間アルゴリズムが存在しないことを示している.

もっとも重要な関連研究として, 誘導性を条件としない最大正則部分グラフ探索問題がある. この問題は長きにわたって研究が行われており, 例えば, グラフ G において 3-正則部分グラフが存在しているかの決定問題は NP 完全であることが示されている ?, GT32. さらに, 入力グラフ G が二部グラフとした場合 ?, または, 平面グラフとした場合 ?, それぞれ 3-正則部分グラフが存在しているかの決定問題は NP 完全であることが示されている.

さらに, Asahiro, Eto, Ito, Miyano は文献 ?において, 2部グラフを入力グラフとした時, r -MaxRIS および r -MaxRICS は近似すら難しいことを示している. また, 弦グラフを入力グラフとした時, 両問題は多項式時間で解くことができるところを示している. 2部グラフ及び, 弦グラフはそれぞれ存在する誘導サイクルの頂点数が限定されたグラフクラスであり, 2部グラフは誘導閉路の長さが必ず偶数であり, 弦グラフの誘導閉路の長さは 3 のみである.

1.3 本論文の結果

本稿では, 入力を弦 2部グラフに限定した場合について, r -MaxRIS および r -MaxRICS は多項式時間で解くことが可能であることを示す. 2部グラフにおいて, 両問題は多項式時間で最適解を求まることが困難であることは示されているが, 本稿では, 両問題が多項式時間で最適解を求めることのできるグラフクラスとして弦 2部グラフを挙げる. 弦 2部グラフについての厳密な定義については後で述べるが, 弦 2部グラフおよび, 2部グラフ, 弦グラフには次のような関係が成り立つ.

弦 2部グラフは 2部グラフの部分グラフクラスであり, 各グラフクラスは誘導閉路の長さが限定されたグラフクラスである. 2部グラフは誘導閉路の長さが偶数のみである. また, 弦グラフの誘導閉路の長さが 3 のみであるのに対して, 弦 2部グラフの誘導閉路の長さは 4 のみである.

弦グラフにおいて, 次数 r の正則誘導部分グラフは完全グラフの構造しか存在しない. さらに, 弦グラフではクリーク木に木分解が行え, その木構造の各ノードは完全グラフである. このことより, 弦グラフにおける r -MaxRIS は, 誘導性を保ちながらグラフより頂点数が最大となるように多くの次数 r の完全グラフを抜き出すことに等しくな

る。また、 r -MaxRICS は次数 r の完全グラフを 1 つ見つけ出す問題と等しくなる。この次数 r の完全グラフを抜き出すことは多項式時間で探索可能であり、両問題は多項式時間で解くことが可能である？。

両問題が多項式時間で解くことが困難である 2 部グラフに対して、その部分グラフクラスである弦 2 部グラフは、弦グラフと同様に木構造を持っており、弦 2 部グラフにおける完全 2 部グラフをノードとする木分解が出来る。さらに、弦 2 部グラフにおいて次数 r の正則誘導部分グラフは次数 r の完全 2 部グラフしか存在しない。このことから、弦 2 部グラフにおいて r -MaxRIS は、誘導性を保ちながらグラフより頂点数が最大となるように多くの次数 r の完全 2 部グラフを抜き出すことに等しくなる。また、 r -MaxRICS は次数 r の完全 2 部グラフを 1 つ見つけ出す問題と等しくなる。本稿では、弦 2 部グラフについて両問題が多項式時間で解けることを示す。

2. 弦 2 部グラフ

本節では、入力グラフを弦 2 部グラフに限定した場合について考える。2 部グラフ G の長さ 6 以上のすべての閉路が少なくとも 1 つの弦を持つとき、 G は弦 2 部グラフと呼ばれる。ここで、弦とは、閉路の中でお互いに隣接しない頂点を連結する辺のことである。

2.1 定義と主要補題

2 部グラフ $B = (V_1, V_2, E_B)$ において、分割された頂点集合 V_1 と V_2 のすべての頂点が連結した 2 部グラフを完全 2 部グラフ、または、バイクリークという。

\mathcal{K}_G をグラフ G のすべての極大バイクリークの集合とし、また、 $\mathcal{K}_v \subseteq \mathcal{K}_G$ を頂点 $v \in V(G)$ を含むすべての極大バイクリークの集合とする。グラフ G が弦 2 部グラフであるとき、木構造である $T = (\mathcal{K}_G, E)$ が存在し、その誘導部分木 $T[\mathcal{K}_v]$ は頂点 $v \in V(G)$ に関して連結している。この木構造をグラフ G のバイクリーク木といい、弦 2 部グラフからバイクリーク木への構造変換は $O(n^2m)$ で行える？。弦 2 部グラフ G のバイクリーク木は G の木分解になっている。よって、 \mathcal{K}_G のバイクリークを T のノードと呼ぶことにし、部分グラフ G_C はノード C に対応する。また、ノード $C \in \mathcal{K}_G$ について、 C の親ノードを $p(C)$ として表す。また、根ノード C_0 については親がないため $p(C_0) = \emptyset$ となる。表記の便宜上、各ノード C の頂点集合 $V(C)$ とし、 $G[C]$ をノード C のバイクリークとする。

ここで、アルゴリズムの設計の上で重要な補題として以下を与える。

補題 1 弦 2 部グラフにおいて、すべての正則誘導部分グラフはバイクリークである。

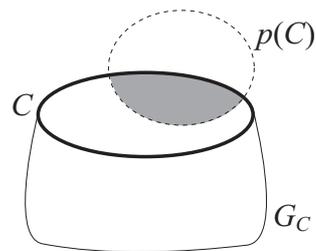


図 2 クリーク木 T のノード C における部分グラフ G_C および親ノード $p(C)$

2.2 r -MaxRICS におけるアルゴリズム

補題 ?? より以下の定理を示す。ここで、次数制約 r は定整数である必要がないことに注意する。

定理 1 任意の整数 $r \geq 0$ について、入力グラフを弦グラフとしたとき、 r -MaxRICS は多項式時間で解くことが可能である。

[証明 (スケッチ)] 補題 ?? は、弦 2 部グラフ G を入力としたとき、 r -MaxRICS は、 G の $(r+1)$ サイズのバイクリークを探索することに等しいことを意味する。ここで、弦 2 部グラフにおいて極大バイクリークをすべて列挙することは多項式時間で可能であり、各極大バイクリークの次数が r 以上であるバイクリークが 1 つでも存在すれば、 $\text{OPT}_{\text{RICS}}(G) = 2r$ 、そうでなければ $\text{OPT}_{\text{RICS}}(G) = 0$ を出力することで、弦 2 部グラフにおいて r -MaxRICS は多項式時間で解くことが可能である。 ■

2.3 r -MaxRIS におけるアルゴリズム

本節では、以下の定理を示す。

定理 2 整数 $r \geq 0$ について、入力を弦グラフとしたとき、 r -MaxRIS は $O(n^2m^2)$ 時間で解くことが可能である。ここで、 n はグラフの頂点数とする。

定理 ?? のアルゴリズムについての証明を示す。ここでまず、次数 r のバイクリークを r -バイクリークとして表すこととする。 r -MaxRICS と同様に、補題 ?? より弦 2 部グラフ G における r -MaxRIS は、独立な r -バイクリークの最大数を探索する問題と等しいことが言える。弦 2 部グラフ G における誘導部分グラフ G' について、部分グラフ G' における独立な r -バイクリークの最大数を $\#_{r+1}(G')$ とする。このとき、最適解 $\text{OPT}_{\text{RIS}}(G) = 2r \cdot \#_{r+1}(G)$ となる。表現の便宜上、頂点の部分集合 $S \subseteq V(G)$ において、 $\#_{r+1}(S) = \#_{r+1}(G[S])$ として表す。

アルゴリズムの主要アイデア

弦 2 部グラフ G によってバイクリーク木 T を生成することが可能である。バイクリーク木 T の各ノードはグラフ G の極大バイクリークとし、各ノードより r -バイクリークを選択するかどうかを T の葉から根にかけて選択することにより、独立な r -バイクリークの最大値を見つけ出すこ

とが可能である。

しかしながら、 T における複数のノードにはグラフ G の同一な頂点を少なくとも 1 つ共有しているため、 r -バイクリークを選ぶうえで、 r -バイクリーク同士の誘導性を保つことに気を付けて選択しなければならない。ここで、バイクリーク木 T の各ノード C とその親ノード $p(C)$ について図 ?? のように、 $C \cap p(C)$ が存在している。したがって、 $G \setminus G_C$ における r -バイクリークと隣り合わないように $G_C \setminus p(C)$ より r -バイクリークを選することで誘導性が保たれる。

アルゴリズムにおいて便宜上、 $G_C \setminus p(C)$ において r -バイクリークが存在しないとき、ノード C に対して *small* とラベル付けをし、誘導性が保たれるようにラベルのついていない極大バイクリークより r -バイクリークの選択を行う。しかし、たとえノード C に *small* とラベル付けしたとしても、 $C \cap p(C)$ に頂点が存在しているため G_C において、1 つ r -バイクリークが存在する可能性はある事に注意しなければならない。

以下に r -MaxRIS に対するアルゴリズムを示す。表記の便宜上、バイクリーク木における全ての葉は子ノードを持ち、その子らはすべて *small* とラベル付けされているものとする。また、ステップ 2 はラベル付けされていない葉ノードに対して実行されるものとする。バイクリーク木の根ノード C_0 について $p(C_0) = \emptyset$ であることに注意する。

初期設定. $S := \emptyset$, $G' := G$ でグラフ G' のバイクリーク木 T' を構成する。

ステップ 1. G' が空である、またはクリーク木 T' のすべてのノードが *small* とラベル付けされているならば、 S を出力する。

ステップ 2. バイクリーク木 T' において、子がすべて *small* とラベル付けされており、自身はラベル付けされていない任意のノード C を選択する。

- (a) $G_C \setminus p(C)$ が r -バイクリークを含むならば、そのバイクリークに含まれる $2r$ 頂点を加える。また、 $G' := G' \setminus G_C$ とし、新しい G' についてバイクリーク木を更新し、ステップ 1 に戻る。

- (b) それ以外の時、ノード C に *small* とラベル付けし、ステップ 1 に戻る。

もし、ステップ 2(a) の結果、非連結な弦グラフ G' が得られた場合には、 G' のそれぞれの連結成分に対して、上で述べたアルゴリズムを適用する。

このアルゴリズムにおいて、補題 ?? を用いることで、 r -MaxRIS の最適解を求めることが出来る。

補題 2 T' においてラベル付けされていないノード C について、ノード C のすべての子はすべて *small* とラベル付けされており、 $G_C \setminus p(C)$ は r -バイクリークを含む。こ

の時、 $\#_{r+1}(G') = \#_{r+1}(G' \setminus G_C) + 1$ となる。

このアルゴリズムは $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ とするとき、計算時間は $O(n^2 m^2)$ である。理由は以下である。バイクリーク木分解は $O(n^2 m)$ である。また、バイクリーク木 T は $O(m)$ 個のノードを持ち、全てのステップは $O(m)$ 時間である。そして、ステップ 2 の 1 回に実行される計算時間は 1 つ以上のノードを削除するか、1 つのノードにラベル付けを行うかである。これにより、定理 ?? が満たされる。

謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金 23500020, 23656274, 25330018 および 25330003 による。

参考文献

- [1] Y. Asahiro, H. Eto, and E. Miyano. Inapproximability of maximum r -regular induced connected subgraph problems. IEICE Transactions on Information and Systems, vol. E96-D, pp. 443–449, 2013.
- [2] Y. Asahiro, H. Eto, T. Ito, and E. Miyano. Complexity of Finding Maximum Regular Induced Subgraphs with Prescribed Degree. Proc. 19th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory (FCT 2013), LNCS 8070, pp.28-39, 2013.
- [3] K. Cameron. Induced matchings. Discrete Applied Mathematics, vol. 24, pp. 97–102, 1989.
- [4] D. M. Cardoso, M. Kamiński, and V. Lozin. Maximum k -regular induced subgraphs. J. Combinatorial Optimization, vol. 14, pp. 455–463, 2007.
- [5] M. R. Garey and D. S. Johnson. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, CA, 1979.
- [6] M.C. Golumbic, C.F. Goss. Perfect elimination and chordal bipartite graphs. J. Graph Theory, vol. 2, pp. 155-163, 1978.
- [7] J. Håstad. Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$. Acta Mathematica, vol. 182, pp. 105–142, 1999.
- [8] V. Kann. Strong lower bounds on the approximability of some NPO PB-complete maximization problems. In Proc. of MFCS 1995, LNCS, vol. 969, pp. 227–236, 1995.
- [9] C. Lund and M. Yannakakis. The approximation of maximum subgraph problems. In Proc. of ICALP 1993, LNCS, vol. 700, pp. 40–51, 1993.
- [10] Y. Orlovich, G. Finke, V. Gordon, and I. Zverovich. Approximability results for the maximum and minimum maximal induced matching problems. Discrete Optimization, vol. 5, pp. 584–593, 2008.
- [11] I. A. Stewart. Deciding whether a planar graph has a cubic subgraph is NP-complete. Discrete Mathematics, vol. 126, pp. 349–357, 1994.
- [12] I. A. Stewart. Finding regular subgraphs in both arbitrary and planar graphs. Discrete Applied Mathematics, vol. 68, pp. 223–235, 1996.
- [13] I. A. Stewart. On locating cubic subgraphs in bounded-degree connected bipartite graphs. Discrete Mathematics, vol. 163, pp. 319–324, 1997.