

ターミナル数限定成分素シュタイナー木最大化問題 の近似アルゴリズム

星加 大輝^{1,a)} 宮野 英次^{1,b)}

概要：成分素なシュタイナー木の最大埋め込み問題（辺素な MaxPST 問題）を考える．無向グラフ $G = (V, E)$ と頂点部分集合であるターミナル集合 $T \subseteq V$ について， T のすべての頂点を含む G の非巡回連結部分グラフをシュタイナー木と呼ぶ．辺素な MaxPST 問題の目標は，グラフ G とターミナル集合 T が与えられた時，できるだけ多くの辺素なシュタイナー木を見つけることである．本稿では，ターミナル数 $|T|$ が 5 以下の場合には 2 近似アルゴリズムが存在することを示す．

キーワード：シュタイナー木，埋め込み，成分素，近似アルゴリズム

Approximation Algorithms for Packing Element-Disjoint Steiner Trees on Bounded Terminals

DAIKI HOSHIKA^{1,a)} EIJI MIYANO^{1,b)}

Abstract: We study the maximum packing element-disjoint Steiner tree problem (element-disjoint MaxPST problem, for short). For a graph $G = (V, E)$ and a subset of vertices $T \subseteq V$, called terminal vertices, a Steiner tree is a connected, acyclic subgraph that contains all the terminal vertices. The goal of the element-disjoint MaxPST problem is to find as many element-disjoint Steiner trees as possible. In this paper, we show that there is a 2-approximation algorithms for the element-disjoint MaxPST problem if the number of terminal vertices is at most 5.

Keywords: Steiner trees, packing, element-disjoint, approximation algorithms

1. はじめに

本稿では，シュタイナー木の最大埋め込み問題（Maximum Packing Steiner Tree 問題，以下では MaxPST 問題）の近似アルゴリズムを考える： 頂点集合を V ，辺集合を E とするとき無向グラフを $G = (V, E)$ と表す．グラフ $G = (V, E)$ について，ある頂点集合をターミナル集合 $T \subseteq V$ と呼び， T に含まれない頂点，すなわち， $V \setminus T$ に含まれる頂点をシュタイナー点と呼ぶ．また， T のすべての頂点を含む G の非巡回連結部分グラフをシュタイナー

木と呼ぶ（ここで，シュタイナー点については必ずしも含む必要はない）．MaxPST 問題の目標は，グラフ G とターミナル集合 T が与えられた時，できるだけ多くの辺素，または成分素なシュタイナー木を見つけることである．ここで，異なるシュタイナー木がお互いに辺を共有しない場合に辺素と呼び，辺とシュタイナー点を共有しない場合に成分素といい，前者を辺素な MaxPST 問題，後者を成分素な MaxPST 問題と呼ぶ．

MaxPST 問題は VLSI の結線問題などへの応用の観点から文献 [6] で提案され，その後，多くの研究が行われている．まず，辺素な MaxPST 問題については以下のことが示されている： Kaski は，2 つの辺素なシュタイナー木を求める問題が NP 困難であること，また， $|T| = 7$ の場合にも辺素な MaxPST 問題が NP 困難となることを示して

¹ 九州工業大学
〒 820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4
^{a)} hoshika@theory.ces.kyutech.ac.jp
^{b)} miyano@ces.kyutech.ac.jp

いる [8]. Chriyan と Salavatipour は $|T| = 4$ の場合にも、辺素な MaxPST 問題が APX 困難となることを示している [3]. さらに, Aazami, Cheriyan, Jampani は $|T| = 3$ の場合にも APX 困難となることを示している [1]. 近似可能性については, 辺素な MaxPST 問題は 2 近似可能であるという Kriesell の予想 [9] が知られている. この予想が正しいかはまだ分かっていないが, 本予想に対して, Lau は 24 近似アルゴリズムを提案し [11][12], その後, West と Wu より, 6.5 近似へと改善されている [15]. ターミナル数を $|T|$ とした場合については, $O(|T|)$ 近似可能であることが Jain, Mahdian, Salavatipour により示されている [7]. また, $|T| = 4$ の場合には 1.5 近似可能であることが Kriesell によって示されている [10].

辺とシュタイナー点を共有しない成分素な MaxPST 問題については, Cheriyan と Salavatipour により, $\Omega(\log n)$ 近似困難性と, $O(\log n)$ 近似率を持つ乱択アルゴリズムが文献 [4] で示されている. ここで, n は入力グラフの頂点数である. その後, Calinescu, Chekuri, Vondrak は脱乱択化アルゴリズムを示している [2]. すなわち, 入力グラフに制限が無い一般の場合については, 近似の意味では, 辺素な MaxPST 問題に比べて成分素な MaxPST 問題の方が難しいと言える. そこで, 入力されるグラフクラスに制限を加えた場合の計算容易性/困難性や近似可能性/困難性についての研究が行われている. Aazami, Cheriyan, Jampani は, 入力グラフを平面グラフに限定した場合について調べ, 2 近似可能であることを示している [1]. また, 同じ論文において, 辺素な MaxPST 問題と同様に, 2 つの成分素なシュタイナー木を求める問題が NP 困難であること, $|T| = 3$ の場合にも成分素な MaxPST 問題が APX 困難となることを示している. しかし, 筆者の知る限り, 成分素な MaxPST 問題に対しては, ターミナル数を限定した場合の近似アルゴリズムについてはほとんど議論されていない.

本研究の目標は, ターミナル数が限定された場合に, $O(\log n)$ 近似アルゴリズムよりも良い, 例えば定数近似アルゴリズムを設計することである. 本論文では, ターミナル数が $|T| = 3, 4, 5$ の場合には, 成分素な MaxPST 問題に対して 2 近似アルゴリズムが存在することを示す.

2. 準備

本稿で考える成分素なシュタイナー木埋め込み最大化問題 (成分素な MaxPST 問題) は以下のように形式化できる. 任意の異なる 2 つのシュタイナー木がお互いに辺とシュタイナー点を共有しないことを条件とした場合のシュタイナー木をできるだけ多く入力グラフに埋め込むことを目的としたグラフの最大化問題である.

成分素なシュタイナー木最大埋め込み問題 (MaxPST 問題)

入力: 無向グラフ $G = (V, E)$, ターミナル集合 $T \subseteq G$

出力: 成分素なシュタイナー木の最大数

お互いに辺を共有しないシュタイナー木を多く求めることを目的とした問題は辺素な MaxPST 問題と呼ぶ.

MaxPST 問題の入力であるグラフとターミナル集合の組 (G, T) に対して, シュタイナー木の最大数を $OPT(G, T)$ とし, 多項式時間で解を求めるアルゴリズム ALG が求めたシュタイナー木の本数を $ALG(G, T)$ とする. このとき, 以下の式を満たすような α が存在するとき, このアルゴリズムを α 近似アルゴリズムと呼び, α を近似率または近似比と呼ぶ.

$$\frac{OPT(G, T)}{ALG(G, T)} \leq \alpha$$

グラフ $G = (V, E)$ とターミナル集合 $T \subseteq G$ が与えられたとき, 任意の 2 頂点 $u, v \in T$ の間に k 本の辺素な道 (path) が存在する場合, ターミナル集合 T は k 辺連結であるという. また, 任意の 2 頂点 $u, v \in T$ の間に k 本の成分素な道が存在する場合, T は k 成分連結であるという. ターミナル集合がすべての頂点集合, すなわち, $T = V$ のときは, 単にグラフ G が k 辺連結または k 成分連結という.

$T = V$ のときは, MaxPST 問題は全域木の埋め込み問題 (Maximum Packing Spanning Tree 問題) と同一の問題となる. Tutte [14] と Nash-Williams [13] は, グラフが k 個の辺素な全域木を持つための必要十分条件を示している. この結果は, すべての $2k$ 辺連結なグラフは k 個の辺素な全域木を持つことを意味し, さらに, $2k$ 辺連結なグラフは高々 k 個の全域木しか含むことはできないため, 2 近似アルゴリズムを意味している. このことは MaxPST 問題についても一般化できる. MaxPST 問題は NP 困難であり, $OPT(G, T)$ を求めることが困難である. そこで, $OPT(G, T) \leq K$ となるような値 K を $OPT(G, T)$ の代わりに用いると, 以下のように近似率の評価を行うことができる.

$$\frac{OPT(G, T)}{ALG(G, T)} \leq \frac{K}{ALG(G, T)} \leq \alpha$$

既存の多くの研究では, 上で述べた全域木の場合と同様に, K として連結度を用いている. すなわち, 辺素 (成分素) な MaxPST 問題を考えた場合, ターミナル集合 T が αk 辺連結 (成分連結) である場合に, G に k 個の辺素 (成分素) なシュタイナー木を見つけるような多項式時間アルゴリズム ALG を設計することができれば, ALG は辺素 (成分素) な MaxPST 問題に対する α 近似アルゴリズムとなる. 第 1 節で述べた辺素な MaxPST 問題に対する従来の結果も連結度の関係を用いている.

予想 1 (Kriesell の予想 [9]) T が $2k$ 辺連結であるならば, G の k 個の辺素なシュタイナー木を求める多項式時間アルゴリズムが存在する.

事実 1 ([15]) T が $6.5k$ 辺連結であるならば, G の k 個の辺素なシュタイナー木を求める多項式時間アルゴリズムが存在する.

成分素な MaxPST 問題についても同様に連結度と成分素なシュタイナー木との関係が調べることにより, 一般のグラフに対して $O(\log n)$ 近似アルゴリズムが提案されている.

事実 2 ([4][2]) T が $k \log n$ 辺連結であるならば, G の k 個の辺素なシュタイナー木を求める多項式時間アルゴリズムが存在する.

ターミナル集合の 2 つの連結度, 辺連結度と成分連結度には, 次の関係が存在する.

事実 3 ([1]) グラフ $G = (V, E)$ とターミナル集合 $T \subseteq G$ が与えられた時, T に $2k$ 辺連結あるならば, T に k 成分連結存在する.

つまり, 成分素な MaxPST 問題の β 近似アルゴリズムは, 辺素な MaxPST 問題の 2β 近似アルゴリズムとして用いることができる. 本論文では, 成分素な MaxPST 問題に対する近似アルゴリズムを設計することを目標としているが, 得られた近似アルゴリズムは辺素な MaxPST 問題に対する近似アルゴリズムとしても利用可能であることを意味する.

成分素な MaxPST 問題を考える場合には, 次の事実 4 で示すように, 成分連結度の値を保持したまま, 入力グラフを 2 部グラフに変換することができることが知られており, 我々の近似アルゴリズムでも利用する.

事実 4 ([4]) グラフ $G = (V, E)$ とターミナル集合 $T \subseteq V$ が与えられ, T が k 成分連結であるとする. このとき, シュタイナー点間の辺の削除と縮約を繰り返すことで, T を k 成分連結としたまま T と $V \setminus T$ が非連結成分となる 2 部グラフ $G' = (T \cup (V \setminus T), E')$ に変換する多項式時間アルゴリズムが存在する.

以下の事実も次節で用いる.

事実 5 ([5]) ターミナル集合を T , シュタイナー点集合を $V \setminus T$ とする 2 部グラフ $G = (T \cup (V \setminus T), E)$ を考える. このとき, シュタイナー点の次数が高々 d であり, かつ, T が $d \cdot k$ 成分連結であるとする, G の k 個の成分素なシュタイナー木を見つける多項式時間アルゴリズムが存在する.

3. ターミナル数が 5 以下の場合の近似アルゴリズム

本節では, ターミナル数 $|T|$ が限定された場合の成分素な MaxPST 問題に対する近似アルゴリズムを考える. まず, 事実 5 より以下の補題が導かれる.

補題 1 ターミナル数が $|T|$ である成分素な MaxPST 問題は $|T|$ 近似可能である.

すなわち, $|T| = 2$ に限定した場合には 2 近似可能であることを意味する. さらに, より詳細に調べることにより以下の定理が得られる.

補題 2 ターミナル数が $|T|$ である成分素な MaxPST 問題は $|T| - 1$ 近似可能である (証明省略).

すなわち, $|T| = 3$ に限定した場合には 2 近似可能であることを意味する. さらに, $|T| = 4$ の場合にも 2 近似可能であることを示すことができる (証明省略). 以上より, 以下の定理を得る.

定理 1 ターミナル数が 4 以下である成分素な MaxPST 問題は 2 近似可能である.

本稿の主要な結果は, $|T| = 5$ とした場合にも成分素な MaxPST 問題に対して 2 近似アルゴリズムを設計できることを示すことである. 以下が本稿の主定理である.

定理 2 グラフ $G = (V, E)$ とターミナル数が $|T| = 5$ であるようなターミナル集合 $T \subseteq V$ を考える. T が $2k$ 成分連結であるならば, G の k 個の成分素なシュタイナー木を求める多項式時間アルゴリズムが存在する.

証明. 入力としてグラフ $G = (V, E)$ と $|T| = 5$ であるようなターミナル集合 $T \subseteq V$ を考える. ここで, T は $2k$ 成分連結であると仮定する. まず, 事実 4 を用いることで, T の成分連結度を保ったまま, G を T と $V \setminus T$ が非連結成分となる 2 部グラフ $G' = (V \cup (V \setminus T), E')$ に変換することができる. 次に, G' のシュタイナー点の次数に着目する. $|T| = 5$ より, シュタイナー点の次数は必ず 5 以下となる. ここからは, G' の次数が d ($d = 2, 3, 4, 5$) のシュタイナー点を W_d と表記する. なお, 次数が 1 のシュタイナー点はターミナル間を繋がないので, ここでは考えないものとする. ここからは, 全体の証明の流れを示す. まず, G' が W_2 のみからなるグラフである場合は事実 5 を用いることで, T が $2k$ 成分連結あるならば, G に k 個の成分素なシュタイナー木を見つけることができる. よって, G' から W_5, W_4, W_3 を含んだシュタイナー木を, $k' \leq k$ について, 「 T が $2k'$ 成分連結あるならば, G に k' 個の成分素なシュタイナー木を見つけることができる」という一般性を保ったまま G' から取り除いていき, G' を W_2 のみからなるグラフにまで変換していく. 取り除く順番は以下の

ようになっている。 W_3 を含んだシュタイナー木はさらに場合分けを行い、それぞれについて証明する。

場合 1 W_5 を含んだシュタイナー木

場合 2 W_4 を含んだシュタイナー木

場合 3 W_3 を含んだシュタイナー木

(1) 高々次数 2 のターミナルをもつ場合

(a) W_3 を 1 つ含んでいる場合

(b) W_3 を 2 つ含んでいる場合

(2) 次数 3 のターミナルをもつ場合

(a) W_3 を 1 つ含んでいる場合

(b) W_3 を 2 つ含んでいる場合

(c) W_3 を 3 つ含んでいる場合

(場合 1) まず G' から W_5 を取り除くことを考える。任意の W_5 は、成分連結度について 1 成分連結分として寄与する。すなわち、1 個の W_5 を取り除くと正確に 1 だけ成分連結度が小さくなる。また、1 個の W_5 と 5 個のターミナルにより正確に 1 個のシュタイナー木を形成している。 G' の W_5 の数を w_5 個とし、 G' から w_5 個の W_5 を取り除くと、 T は $2k - w_5$ 成分連結となる。よって、 T の $2k$ 成分連結から w_5 個のシュタイナー木を取り出すことができたことになる。現時点で、 T は $2k - w_5 \geq 2(k - w_5) = 2k'$ 成分連結であり、すべての W_5 を取り除いたグラフから $k' = k - w_5$ 個の成分素なシュタイナー木を求めることができることを示せば、本定理が成り立つことになる。すなわち、一般性を保ったまま G' から W_5 を取り除くことができた。

(場合 2) 簡単のため、現時点の T の成分連結度を $2k$ とし、 W_5 を取り除いたグラフを G' とする。この時点で G' は次数 4 以下のシュタイナー点しか存在しない。次に、 W_4 を G' から取り除くことを考える。一般性を失うことなく、 W_4 を含んだシュタイナー木は図 1 のように 2 つの (タイプの) シュタイナー点からなっていることがいえる。ちなみに、以降、図中の黒い頂点をターミナル、白い頂点をシュタイナー点とする。



図 1 場合 2

ここで、 W_4 を含んだシュタイナー木を G' から取り除いた場合の G' の成分連結を考える。成分連結の定義より、1 つのシュタイナー点は、高々 1 成分連結にしか含まれないので、2 つのシュタイナー点からなるシュタイナー木は高々 2 成分連結にしか含まれない。よって W_4 を含んだシュタイナー木を、 G' から取り除いても連結度は高々 2 しか下がらない。これは T に $2k'$ 成分連結あるならば、 G に k' 個の成分素なシュタイナー木が存在するという一般性を

満たしている。これにより、一般性を保持したまま G' から W_4 を取り除くことができた。現時点で、 G' は次数 3 以下のシュタイナー点しか存在しない。

(場合 3) 次に、 G' から W_3 を取り除くことを考える。 W_3 を含んだシュタイナー木は次の 2 つの場合からなっている。 W_3 を含んだシュタイナー木において、次数 4 以上のターミナルをもつシュタイナー木は存在しないので、ここでは考えないものとする。

(1) 高々次数 2 のターミナルをもつシュタイナー木

(2) 次数 3 のターミナルをもつシュタイナー木

まず、高々次数 2 のターミナルをもつシュタイナー木から考える。高々次数 2 のターミナルをもつシュタイナー木は、図 2 と図 3 の 2 つの場合が存在する。この 2 つの場合

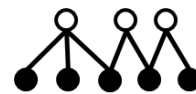


図 2 場合 3(1)-a



図 3 場合 3(1)-b

において、 T が $2k'$ 成分連結あるならば、 G に k' 個の成分素なシュタイナー木を見つけることができるという一般性を保ったまま、 G' から取り除くことができることを証明する。まず、図 2 のシュタイナー木を、一般性を保ったまま、 G' から取り除くことができることが証明する。この証明には、まず図 2 のシュタイナー木を含んだ 3 成分連結グラフ G_a を考え、図 2 のシュタイナー木を一般性を保った G_3 から取り除くことができることを背理法を用いて証明する。まず、図 2 のシュタイナー木を G_a から取り除くと、高々 2 成分連結しか下がらない、つまり 3 成分連結下がるかと仮定する。今、仮定より G_a から図 2 のシュタイナー木を取り除くと 3 成分連結下がるので、残りのグラフ G'_a は非連結となる。よって $|T| = 5$ より、 G'_a はターミナルが 3 個と 2 個の連結成分となっている。よって、図 2 のシュタイナー木において、ターミナルを 3 個と 2 個の頂点集合に分けた時に、その間に 3 本以上の辺があるものが存在しないと、 G_a は 3 成分連結グラフにならない。実際、図 2 のターミナルを 3 個と 2 個の頂点集合に分けるとの組み合わせも、その間に 3 本以上の辺が存在するものはない。よって、 G'_a は必ず連結となり、図 2 のシュタイナー木を G_a から取り除いても 3 成分連結下がる。これは、仮定と矛盾する。よって、図 2 のシュタイナー木を G_a から取り除くと、高々 2 成分連結しか下がらない。ここで G' について、図 2 のシュタイナー木を含んだ 3 成分連結グラフを考えると、成分連結度は高々 2 しか下がらない。よって G'

の成分連結度は高々2しか下がらない．これにより，一般性を保ったまま，図2のシュタイナー木を G' から取り除くことができることが証明できた．

次に，図3のシュタイナー木を，一般性を保ったまま， G' から取り除くことができることが証明する．この証明も同様に，図3のシュタイナー木を含んだ3成分連結グラフ G_b を考え，図3のシュタイナー木を一般性を保ったまま， G_b から取り除くことができることを背理法を用いて証明する．同様に，図3シュタイナー木において，ターミナルを3個と2個の頂点集合に分けるどの組み合わせも，その間に3本以上の辺が存在するものはないので， G'_b は必ず連結となる．図3のシュタイナー木を G_b から取り除いても3成分連結下下らない．これは，仮定と矛盾する．よって，図3のシュタイナー木を G_b から取り除くと，高々2成分連結しか下がらない．ここで G' について，図3のシュタイナー木を含んだ3成分連結グラフを考えると，成分連結度は高々2しか下がらない．これにより，一般性を保ったまま，図3のシュタイナー木を G' から取り除くことができることが証明できた．

図2,3の2つの場合において，一般性を保ったまま G' から取り除くことができた．よって高々次数2のターミナルをもつシュタイナー木を一般性を保ったまま G' から取り除くことができた．

次に，次数3のターミナルをもつシュタイナー木を G' から取り除くことを考える．これにより， G' から W_3 をすべて取り除くことができる．ここで， G' にまだ残っている W_3 について考える．今，高々次数2のターミナルをもつシュタイナー木は存在しないので，その条件の下で残っている W_3 を考えると，図4のように高々3種類の W_3 しか存在しないということがいえる．よって， G' に残って



図4 場合3(2)-a



図5 場合3(2)-b

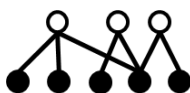


図6 場合3(2)-c

いる次数3のターミナルをもつシュタイナー木は， W_3 を3つ含んだ図4， W_3 を2つ含んだ図5， W_3 を1つ含んだ図6の3つの内のどれかになっている．この3つの場合のシュタイナー木を， T が $2k'$ 成分連結あるならば， G に k' 個の成分素なシュタイナー木を見つけることができるという一般性を保ったまま， G' から取り除くことができること

を証明する．

まず， W_3 を1つ含んだ図6が残った場合を考える．今， G' には，高々次数2のターミナルをもつシュタイナー木は存在しないので，その条件の下で G' に存在する W_2 を考えると，図7のように必ず次数3のターミナルと繋がっているものしか存在しないことがいえる．よって G' は，図7

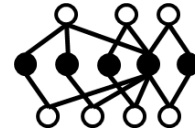


図7 場合3(2)-cを含んだ G'

のように7種類のシュタイナー点が複数存在するグラフであることがいえる．この G' において図6のシュタイナー木を取り除いても，成分連結は1しか下がらない．よって， T が $2k'$ 成分連結あるならば， G に k' 個の成分素なシュタイナー木を見つけることができるという一般性を保ったまま図6のシュタイナー木を取り除くことができる． G' から図6のシュタイナー木をすべて取り除くと， G' が非連結になるか G' から W_3 がなくなる． G' が非連結が非連結になった場合は，一般性を保ったまま G' を非連結にすることができたので証明が終了する． W_3 がなくなった場合は， G' は W_2 のみになり，事実5を用いることにより証明が終了する．

次に， W_3 を2つ含んだ図5が残った場合を考える．この場合も同様に G' に存在する W_2 を考えると，図8のように必ず次数が3のターミナルと繋がっているものしか存在しないことがいえる．よって G' は，図8のように7種類のシュタイナー点が複数存在するグラフであることがいえる．この G' において図5のシュタイナー木を取り除い

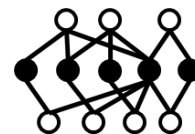


図8 場合3(2)-bを含んだ G'

ても，成分連結は1しか下がらない．よって， T が $2k'$ 成分連結あるならば， G に k' 個の成分素なシュタイナー木を見つけることができるという一般性を保ったまま図5のシュタイナー木を取り除くことができる． G' から図5のシュタイナー木をすべて取り除くと， G' が非連結になるか G' から W_3 がなくなる． G' が非連結になった場合は，一般性を保ったまま G' を非連結にすることができたので証明が終了する．2種類ある W_3 が両方なくなった場合は G' は W_2 のみになり，事実5を用いることにより証明が終了する．片方がなくなった場合は G' は図6の形になり，この場合は証明しているもので，証明が終了する．

最後に、 W_3 を3つ含んだ図4が残った場合を考える。この場合も同様に G' に存在する W_2 を考えると、図9または図10のように必ずどちらかの次数が3のターミナルと繋がっているものしか存在しないことがいえる。よって G' は、図9または図10のように6種類のシュタイナー点が多数存在するグラフであることがいえる。

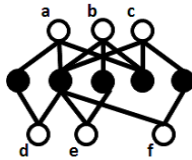


図9 場合3(2)-aを含んだ G' (タイプ1)

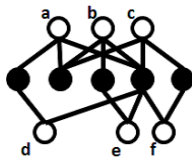


図10 場合3(2)-aを含んだ G' (タイプ2)

現時点で G' が3成分連結未満の場合は、図4のシュタイナー木を抜いて、一般性を保ったまま G' を非連結にできたので証明が終了する。 G' が3成分連結以上ある場合は、図9または図10において、 a, b, f と c, d, e のシュタイナー点からなる2つのシュタイナー木を取り除く。図9または図10は3連結であり2つのシュタイナー木取り除くことができる。これは T が $2k'$ 成分連結あるならば、 G に k' 個の成分素なシュタイナー木を見つけることができるという一般性を保っている。

この G' からシュタイナー木を取り除く操作を続けると、 G' から W_3 または W_2 のシュタイナー点なくなる。 W_3 がすべてなくなった場合は G' は W_2 のみからなるので、事実5を用いることにより証明が終了する。 W_3 がまだあまっている場合は、 G' は図6または図5の形になり、この場合は証明しているので、証明が終了する。 W_2 のシュタイナー点なくなった場合は、 G' は W_3 のみからなり、さらに図4のシュタイナー木しか存在しない。よって、図4は1成分連結であり、一般性を保ったまま G' から取り除くことができる。 G' から図4のシュタイナー木をすべて取り除くことで、 G' は非連結になる。よって T が $2k'$ 成分連結あるならば、 G に k' 個の成分素なシュタイナー木を見つけることができるという一般性を保ったまま G' を非連結にすることができたので証明が終了する。□

謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金 23500020 による。

参考文献

- [1] A. Aazami, J. Cheriyan, K.R. Jampani. Approximation algorithms and hardness results for packing element-disjoint Steiner trees in planar graphs. *Algorithmica*, **63**, pp.425–456, 2012.
- [2] G. Calinescu, C. Chekuri, J. Vondrak. Disjoint bases in a polymatroid. *Random Structures & Algorithms*, **35**(4), pp.418–430, 2009.
- [3] J. Cheriyan and M.R. Salavatipour. Hardness and approximation results for packing Steiner trees. *Algorithmica*, **45**(1), pp.21–43, 2006.
- [4] J. Cheriyan and M.R. Salavatipour. Packing element-disjoint Steiner trees. *ACM Trans. Algorithms*, **34**(4), Article 47, 2007.
- [5] A. Frank, T. Király, M. Kriesell. On decomposing a hypergraph into k connected sub-hypergraphs. *Discrete Applied Math.*, **131**(2), pp.373–383, 2003.
- [6] M. Grötschel, A. Martin, and R. Weismantel. The Steiner tree packing problem in VLSI design. *Mathematical Programming*, **78**, pp.265–281, 1997.
- [7] K. Jain, M. Mhdian, M.R. Salavatipour. Packing Steiner trees. In *Proc. ACM-SIAM SODA*, pp.266–274, 2003.
- [8] P. Kaski. Packing Steiner trees with identical terminal sets. *Information Processing Letters*, **91**(1), pp.1–5, 2004.
- [9] M. Kriesell. Edge-disjoint trees containing some given vertices in a graph. *J. Combinatorial Theory, Series B*, **88**, pp.53–65, 2003.
- [10] M. Kriesell. Packing Steiner trees on four terminals. *J. Combinatorial Theory, Series B*, **100**, pp.546–553.
- [11] L.C. Lau. On approximate min-max theorems for graph connectivity problems. *PhD thesis, University of Toronto*, 2006.
- [12] L.C. Lau. An approximate max-Steiner-tree-packing min-Steiner-cut theorem. *Combinatorica*, **27**, pp.71–90, 2007.
- [13] C.St.J.A. Nash-Williams. Edge disjoint spanning trees of finite graphs. *J. London Math. Soc.*, **36**, pp.445–450, 1961.
- [14] W.T. Tutte. On the problem of decomposing a graph into n connected factors. *J. London Math. Soc.*, **36**, pp.221–230, 1961.
- [15] D.B. West and H. Wu. Packing of Steiner trees and S-connectors in graphs. *J. Combinatorial Theory, Series B*, **102**, pp.186–205, 2012.