

弦グラフにおける直径限定部分グラフ最大化問題

朝廣 雄一^{1,a)} 土井 悠也^{2,b)} 宮野 英次^{2,c)} 志水 宏宇^{2,d)}

概要: 本稿では, 指定した直径 d 以下の部分グラフの中でできるだけ大きな部分グラフを探索する最大直径 d クラン問題 (MAX d -CLAN 問題) について考察する. 与えられたグラフ G の直径 d クリーク (d クリーク) とは, 2 つの頂点 $u, v \in Q_d$ に対して, $\text{dist}_G(u, v) \leq d$ が成り立ち, さらに Q_d が極大であるような頂点の部分集合 $Q_d \subseteq V(G)$ である. さらに, d クリーク Q_d によって誘導されるグラフ $G[Q_d]$ の直径 $\text{diam}(G[Q_d])$ が d 以下であるならば, d クリークは直径 d クラン (d クラン) と呼ばれる. MAX d -CLAN 問題の目的は, 入力グラフ G の中から頂点数が最大となる d クランを見つけることである. 本稿では, 任意の整数 $d \geq 1$ について, 入力が (i) 区間グラフ, (ii) 台形グラフ, (iii) 強弦グラフのとき, MAX d -CLAN 問題は多項式時間で解くことができることを示す. また, 任意の奇数 $d \geq 1$ について, 入力が (iv) 弱弦グラフ, (v) 弦グラフのとき, MAX d -CLAN 問題は多項式時間で解くことができることを示す.

Maximum Diameter-Bounded Subgraphs in Chordal Graphs

YUICHI ASAHIRO^{1,a)} YUYA DOI^{2,b)} EIJI MIYANO^{2,c)} HIROTAKA SHIMIZU^{2,d)}

Abstract: We study the problem of finding a subgraph of maximum cardinality such that its diameter is bounded by an input integer d , called the maximum diameter- d clan problem (MAX d -CLAN): A *diameter- d clique* (*d-clique* for short) in a graph G is a subset $Q_d \subseteq V(G)$ of vertices such that for pairs of vertices $u, v \in Q_d$, the distance between u and v is at most d and this subset is maximal. A *d-clique* Q_d is called a *diameter- d clan* (*d-clan* for short) if the diameter of the induced subgraph by Q_d is no more than d . Given a graph G , the goal of MAX d -CLAN is to find a d -clan of maximum cardinality in G . In this paper, we show that for every integer $d \geq 1$, MAX d -CLAN can be solved in polynomial time for (i) *interval* graphs, (ii) *trapezoid* graphs, and (iii) *strongly chordal* graphs. Furthermore, we show that for every *odd* integer $d \geq 1$, MAX d -CLAN can be solved in polynomial time for (iv) *weakly chordal* graphs and thus (v) *chordal* graphs.

1. はじめに

頂点集合を V , 辺集合を E , 無向グラフを $G = (V, E)$ とする. $V(G)$ および $E(G)$ はそれぞれグラフ G の頂点集合および辺集合を表す. 本稿では, 断らない限り, 入力グラフの頂点数を $|V| = n$ とし, 辺数を $|E| = m$ とする. u, v を端点とするグラフの辺は (u, v) と表す. 頂点の部分集合

$U \subseteq V$ によって誘導される部分グラフを $G[U]$ とする. G のある部分グラフ H における 2 頂点 u と v の距離, すなわち H 内での u と v の最短の道の長さを $\text{dist}_H(u, v)$ で表す. 部分グラフ H の直径を $\text{diam}(H) = \max_{u, v \in V(H)} \text{dist}_H(u, v)$ と定義する. 最大化問題に対するアルゴリズム ALG が任意の入力 G に対して $\text{OPT}(G)/\text{ALG}(G) \leq \sigma$ を満たすとき, ALG は σ -近似アルゴリズムであるという. また, σ を ALG の近似率という. ここで, $\text{ALG}(G)$ と $\text{OPT}(G)$ は, それぞれ ALG と何らかの最適アルゴリズムで得られる解の値とする.

グラフ最適化問題やアルゴリズム論において最も重要な有名な問題の一つとして最大クリーク問題 (MAX CLIQUE 問題) があり, 多くの研究が行なわれている [5]: クリーク

¹ 九州産業大学
〒 813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1
² 九州工業大学
〒 820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4
^{a)} asahiro@is.kyusan-u.ac.jp
^{b)} doi@theory.ces.kyutech.ac.jp
^{c)} miyano@ces.kyutech.jp
^{d)} shimizu@theory.ces.kyutech.ac.jp

とは、任意の頂点間が隣接しているグラフのことで、その直径は1である。グラフ G が与えられたとき、MAX CLIQUE 問題の目的は、 G 中の最大クリークを見つけることである。MAX CLIQUE 問題の判定版は、Karp が示した最初の 21 個の $\mathcal{NP}$ -完全問題の1つである [14]。MAX CLIQUE 問題に対して最良の多項式時間近似アルゴリズムは、最適解の $n(\log \log n)^2/(\log n)^3$ 分の1程度の解なら見つけることができる、すなわち、 $O(n(\log \log n)^2/(\log n)^3)$ -近似アルゴリズムが知られている [10]。一方、 $\mathcal{NP} \neq \mathcal{ZPP}$ という仮定のもとで、Bellare らは MAX CLIQUE 問題には $n^{1/3-\varepsilon}$ よりも良い近似率を持つ多項式時間アルゴリズムは存在しないことを示している [4]。ここで ε は任意の正数である。また、Håstad は同じ仮定のもとで、 $n^{1-\varepsilon}$ よりも良い近似率を持つアルゴリズムは存在しないことを示している [13]。 $\mathcal{NP} \neq \mathcal{ZPP}$ ではなく、少し弱い $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ を仮定すると、この近似度の下界は $n^{1/2-\varepsilon}$ になる。既知の最も高い近似下界は、Zuckerman により示されており、 $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ という仮定の下での $n^{1-\varepsilon}$ である [19]。ここで、 ε は、上と同様に任意の正数である。

本稿では MAX CLIQUE 問題の自然な拡張である、最大直径 d クラン問題 (Maximum Diameter- d Clan 問題、以下では MAX d -CLAN 問題) について議論する。MAX d -CLAN 問題の定義は以下である：与えられたグラフ G の直径 d クリーク (d クリーク) とは、2つの頂点 $u, v \in Q_d$ に対して、 $\text{dist}_G(u, v) \leq d$ が成り立ち、さらに Q_d が極大であるような頂点の部分集合 $Q_d \subseteq V(G)$ である。ここで、 Q_d が極大とは、任意の頂点 $w \in V(G) \setminus Q_d$ について、 $\text{dist}_G(w, v) > d$ となるような頂点 $v \in Q_d$ が存在することを意味する [16]。さらに、 d クリーク Q_d によって誘導されるグラフ $G[Q_d]$ の直径 $\text{diam}(G[Q_d])$ が d 以下であるならば、 d クリークは直径 d クラン (d クラン) と呼ばれる [18]。グラフ G が与えられたとき、MAX d -CLAN 問題の目的は、 G の中から頂点数が最大となる d クランを見つけることである。 $d = 1$ の場合は、MAX d -CLAN 問題は正確に MAX CLIQUE 問題と同じ問題であり、 $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ の仮定の下では任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n^{1-\varepsilon}$ よりも良い近似率を持つアルゴリズムは存在しないことになる。さらに、 $d \geq 2$ である場合にも、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n^{1/3-\varepsilon}$ よりも良い近似率の解を求めることは $\mathcal{NP}$ -困難であることが Marinček らによって示されている [17]。さらに、Asahiro, Miyano, Samizo は、より大きな $n^{1/2-\varepsilon}$ の近似下界を示している [2]。

MAX d -CLAN 問題は、最適解を得ることが困難であることはもちろんのこと、例えば定数などの近似率は得られないことから、近似の観点からも難しいと考えられる。しかしながら、例えば入力されるグラフが平面グラフや理想グラフなどに制限される場合には、MAX 1-CLAN 問題は多項式時間で解けることが知られている [11], [12]。一方で、入力を弦グラフに限定したとしても、 $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ の仮定の下

で、任意の ε と任意の偶数 $d \geq 2$ について多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$ -近似アルゴリズムは存在しないこと、スプリットグラフに限定した場合も同様に、多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$ -近似アルゴリズムは存在しないことが知られている [2]。このように、MAX d -CLAN 問題の難しさは、入力グラフの制限や、 d の値によって変化することがわかる。そこで、本稿では、入力グラフを弦グラフ、弦グラフの部分クラス、弦グラフと似た特徴を持ったグラフクラスに着目して、MAX d -CLAN 問題の計算複雑さを調べることを目標とする。

本稿では、任意の整数 $d \geq 1$ について、入力が (i) 区間グラフ、(ii) 台形グラフ、(iii) 強弦グラフのとき、MAX d -CLAN 問題は多項式時間で解くことができることを示す。また、任意の奇数 $d \geq 1$ について、入力が (iv) 弱弦グラフ、(v) 弦グラフのとき、MAX d -CLAN 問題は多項式時間で解くことができることを示す。各グラフクラスの定義とクラス間の包含関係については、次節で与える。上記結果 (i) および (v) については文献 [2] の中でも得られているが、その証明には不備がある。第2節において証明の問題点を指摘を行い、第3節で上記の多項式時間アルゴリズムを示す。

2. 準備

2.1 諸定義

グラフ G のある頂点 v_0 から v_l へ至る長さ l の道 (パス) P は $P = \langle v_0, v_1, \dots, v_l \rangle$ と頂点の列で表す。ただし、 P において $v_i \neq v_j$ ($0 \leq i, j \leq l, i \neq j$) である。また、 P によってそれら l 頂点からなる集合 $P = \{v_0, v_1, \dots, v_l\}$ を表す。長さ l の閉路 (サイクル) C についても頂点列 $C = \langle v_0, v_1, \dots, v_{l-1}, v_0 \rangle$ と表す。ただし、 C において $v_i \neq v_j$ ($0 \leq i, j \leq l-1, i \neq j$) である。閉路についても C によって頂点集合を表す。長さが偶数の閉路を偶閉路、奇数の閉路を奇閉路と呼ぶ。

$V(G_S) \subseteq V(G)$ かつ $E(G_S) \subseteq E(G)$ であるようなグラフ G_S を、グラフ G の部分グラフという。 G_S の任意の2頂点 u, v に関して $\text{dist}_{G_S}(u, v) \leq 1$ が成り立つとき、この G_S をクリークという。頂点の部分集合 $U \subseteq V(G)$ を頂点集合とし、両端点がともに U に属するような辺すべてを辺集合とするような部分グラフを誘導部分グラフといい、 $G[U]$ と表す。また、 $G[U]$ は U によって誘導される部分グラフであると表現することもある。

あるグラフ G と同じ頂点集合を持つグラフを H を考える。 G の任意の2頂点 u, v に対して辺 (u, v) が存在しない場合にのみ、グラフ H に辺 (u, v) が存在するとき、この H を G の補グラフといい、 $H = \overline{G}$ と表す。

グラフ G において、 $\text{dist}_G(u, v) \leq d$ (d は整数、 $d \geq 1$) をみたす2頂点 u, v の組すべてに対して辺 (u, v) を追加することで得られるグラフを G の d 次べきグラフといい、 G^d と

表す．ある閉路 C の中で隣接していない任意の 2 頂点 u, v に関して，グラフ G に辺 (u, v) が存在するとき， C は弦を持つという．ある偶閉路 C の中で距離が奇数であるような任意の 2 頂点 u, v ，すなわち， $\text{dist}_C(u, v) = 1, 3, 5, \dots$ であるような 2 頂点 u, v について，グラフ G に辺 (u, v) が存在するとき，閉路 C は奇弦を持つという．

本稿では以下のグラフクラスを考える．

定義 1 グラフ G に存在する長さ 4 以上のすべての閉路が必ず弦を持つとき， G を弦グラフと呼ぶ． $\square$

定義 2 グラフ G およびその補グラフ $\bar{G}$ に存在する長さ 5 以上のすべての閉路が必ず弦を持つとき， G を弱弦グラフと呼ぶ． $\square$

定義 3 グラフ $G = (V, E)$ が以下の条件を満たすとき， G を強弦グラフと呼ぶ．

- G は弦グラフである．
- G に存在する長さ 6 以上のすべての偶閉路が少なくとも 1 本の奇弦を必ず持つ． $\square$

弦グラフ，弱弦グラフ，強弦グラフの間には次の関係がある．

事実 1 (i) 強弦グラフは弦グラフの部分クラスである．
(ii) 弦グラフは弱弦グラフの部分クラスである． $\square$

定義 4 グラフ $G = (V, E)$ に対して，実直線上の閉区間集合 $\mathcal{I}$ で以下の条件を満たすものが存在するとき， G を区間グラフと呼ぶ．

- V と $\mathcal{I}$ の間に 1 対 1 対応が存在する．
- 2 頂点 $u, v \in V$ に対して 2 つの閉区間 $I_u, I_v \in \mathcal{I}$ がそれぞれ対応するとする． $I_u \cap I_v \neq \emptyset$ であるとき，かつそのときに限り， G において対応する u, v の間に辺 $(u, v) \in E$ が存在する． $\square$

事実 2 区間グラフは弦グラフの部分クラスである． $\square$

ある平行な 2 本の水平直線を考える．上の直線を Line_t ，下の直線を Line_b と呼ぶことにする．それぞれの直線上には点が並んでおり， Line_t 上の点は左から順番に $t_1, t_2, \dots, t_{2n}$ と番号付けされ，同様に， Line_b 上の点は左から順番に $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ と番号付けされているものとする．このとき， Line_t と Line_b のそれぞれから 2 点ずつ，合計 4 点を繰り返し選択することで複数の台形を作ることができる．ただし，1 度台形を作るために選択した点は，他の台形を作る際に再び選択してはいけないものとする．すなわち， Line_t と Line_b の $4n$ 点から n 個の台形を作ることができ，それらの台形集合を $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ とする．

定義 5 グラフ $G = (V, E)$ に対して，台形集合 $\mathcal{T}$ で以下の条件を満たすものが存在するとき， G を台形グラフと呼ぶ．

- V と台形集合 $\mathcal{T}$ の間に 1 対 1 対応が存在する．
- 2 頂点 $u, v \in V$ に対して 2 つの台形 $T_u, T_v \in \mathcal{T}$ がそれぞれ対応するとする．このとき， T_u と T_v が Line_t と Line_b との間で交差しているとき，かつそのときに限り， G において対応する u, v の間に辺 $(u, v) \in E$ が存在する． $\square$

事実 3 (i) 台形グラフは弱弦グラフの部分クラスである [8]．(ii) 区間グラフは台形グラフの部分クラスである． $\square$

また，弦グラフ，弱弦グラフ，強弦グラフ，区間グラフ，台形グラフはすべて，理想グラフの部分クラスである [6]．

2.2 問題の定義

MAX d -CLAN 問題は次のように定義される．

最大直径 d クラン問題 (MAX d -CLAN 問題)
 入力: 連結無向グラフ $G = (V, E)$ ，整数 d
 $(1 \leq d \leq |V| - 1)$ ．
 出力 直径 $\text{diam}(G_s)$ が d 以下であり，頂点数が最大となるような G の部分グラフ G_s

この定義から分かるように，MAX d -CLAN 問題は MAX-CLIQUE 問題で求める部分グラフの直径を 2 以上へと一般化した問題である．

2.3 従来研究

文献 [2] では与えられたグラフの d 次のべきグラフを求めるアルゴリズムと最大クリークを求めるアルゴリズムを利用することにより，以下のような MAX d -CLAN 問題に対するアルゴリズムが提案されている．

アルゴリズム ByFindClique
 入力: 連結無向グラフ $G = (V, E)$ ，整数 d
 出力 直径 $\text{diam}(G_s)$ が d 以下であり，頂点数が最大となるような G の部分グラフ G_s
 ステップ 1. $\text{PowerOfGraph}(G, d)$ により G^d を得る．
 ステップ 2. $\text{FindClique}(G^d)$ により， G^d の最大クリーク $G_Q = (V_Q, E_Q)$ を得る．
 ステップ 3. $G_S = (V_Q, E \cap E_Q)$ を出力する．

$\text{PowerOfGraph}(G, d)$ は，入力として与えられたグラフの d 次べきグラフを得ることができる以下のアルゴリズムである： 連結無向グラフ $G = (V, E)$ と整数 d が与えられたとき， $\text{dist}_G(u, v) \leq d$ である 2 頂点 $u, v \in V$ のすべての組に対して辺 (u, v) を追加することで G^d を出力することができる．この $\text{PowerOfGraph}(G, d)$ は多項式時間で実行することができる．また， FindClique は，入力として与えられたグラフにおける最大クリークを求めることができるア

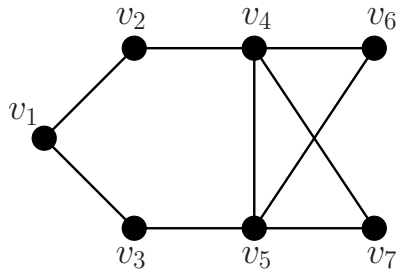


図 1 グラフ G_1

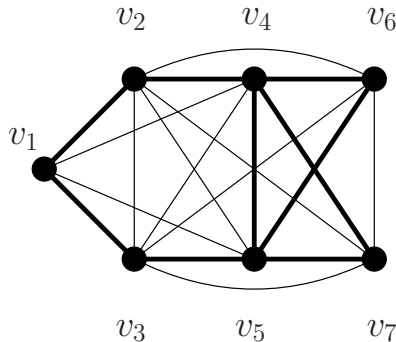


図 2 グラフ G_1^2

ルゴリズムである．この FindClique は多項式時間で実行できるとは限らないアルゴリズムであり，実行に指数時間を要する可能性もある．よって，ByFindClique の実行時間は FindClique の実行時間に依存することになり，FindClique が指数時間アルゴリズムであるとき指数時間，FindClique が多項式時間アルゴリズムであるとき多項式時間となる．

文献 [2] によれば，グラフ G の部分グラフであり直径 $diam(H) \leq d$ であるような任意の部分グラフ H はべきグラフ G^d においてクリークとなるため， G に ByFindClique を適用することで直径 $diam(G_S) \leq d$ の最大部分グラフ G_S を求めることができるという．しかし，一般のグラフにおける MAX d -CLAN 問題に対して ByFindClique を（おそらく指数時間を必要とする）最適解探索アルゴリズムとして用いたとき，必ずしも最適解を求められるとは限らない．図 1 に示された 7 頂点からなるグラフ G_1 を考える．PowerOfGraph($G_1, 2$) により求められた G_1 の 2 次のべきグラフ G_1^2 は図 2 となる． G_1^2 において $S = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ によって誘導される部分グラフ $G_1^2[S]$ は G_1^2 の中の最大クリークとなる（図 3 参照）．しかし，入力グラフ G_1 について S から誘導される $G_1[S]$ における v_2 と v_3 の距離は $dist_{G_1[S]}(v_2, v_3) = 3$ となっている（図 1 参照）．

一般のグラフ G において，直径 d 以下である G の部分グラフ $G[S]$ は d 次のべきグラフ G^d において必ずクリークとなっている．しかし，逆は成り立たず，直径 $d+1$ 以上である G の部分グラフ $G[S']$ が G^d においてクリークにな

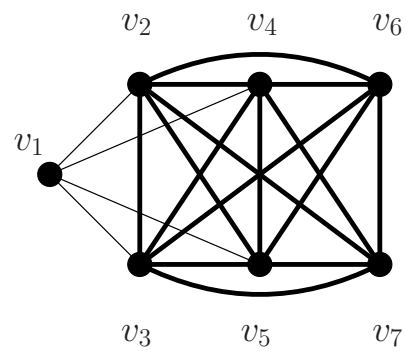


図 3 $G_1^2[\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}]$

らないとは限らない．このため ByFindClique は， G^d においてクリークとなるような直径 $d+1$ 以上の部分グラフ $G[S']$ を，直径 $diam(G[S']) \leq d$ である最大部分グラフとして誤って出力してしまうことがある．

このように，一般のグラフにおける最適解探索アルゴリズムとしては不備がある ByFindClique であるが，入力グラフを特定のグラフクラスに制限することで正しく最適解を求めることができるかもしれない．本稿では，弦グラフや台形グラフなどのように誘導閉路の長さが限定されたグラフに対しては ByFindClique により最大サイズの d クランを求めることができることを示す．弦グラフや台形グラフにグラフを限定した場合には最大クリークを多項式時間で求めることができることを利用すると，ByFindClique が多項式時間で動作することになる．

3. 多項式時間アルゴリズム

本節では，入力として与えられるグラフを弦グラフ，弱弦グラフ，強弦グラフ，区間グラフ，台形グラフに制限した場合において，アルゴリズム ByFindClique によって MAX d -CLAN 問題に対する最適解，すなわち，最大頂点数を持つ d クランを求めることができることを証明する．より正確には，定理 1 で示すように，MAX d -CLAN 問題の入力グラフ G に存在する長さ $d+3$ 以上のすべての閉路が少なくとも 1 本の弦を持つ場合の最適性を示す．以下では，べきグラフを考えているため， $d \geq 2$ とする．

定理 1 入力グラフ G に存在する長さ $d+3$ 以上のすべての閉路が少なくとも 1 本の弦を持つとき，MAX d -CLAN 問題の最適解を ByFindClique によって求めることができる

証明． アルゴリズム ByFindClique によって最適解が求まることを，背理法を利用して証明する．入力グラフ G に存在する長さ $d+3$ 以上のある閉路が少なくとも 1 本の弦を持つとき，ByFindClique を用いることにより求めた部分グラフ G_S の直径が d より大きくなる，すなわち

$diam(G_S) > d$ となることであると仮定する。

G_S の直径について $diam(G_S) > d$ が成り立つという仮定から、 G_S において距離 $dist_{G_S}(v_l, v_r) \geq d+1$ であるような 2 頂点 $v_l, v_r \in V(G_S)$ が少なくとも 1 組は必ず存在する。また、 G_S は G に ByFindClique を適用することで求めた部分グラフであるので、べきグラフ G^d には辺 (v_l, v_r) が存在しており、 G においては $dist_G(v_l, v_r) \leq d$ となる。すなわち、 $2 \leq dist_G(v_l, u) + dist_G(u, v_r) \leq d$ であり、 $V(G_S)$ には属さないような頂点 $u \in V(G)$ が必ず存在することになる。この u が $V(G_S)$ に属さないことから、 $dist_G(u, w) \geq d+1$ であるような頂点 $w \in V(G_S)$ が少なくとも 1 個は必ず存在することになる。

G_S において、 u から v_l へ至る最短の道を $P_{u, v_l} = \langle u, \dots, v_l \rangle$ とし、 u から v_r へ至る最短の道を $P_{u, v_r} = \langle u, \dots, v_r \rangle$ とする。これらの道の長さは 1 以上となる。 v_l から w へ至る最短を $P_{v_l, w} = \langle v_l, \dots, w \rangle$ とし、 v_r から w へ至る最短の道を $P_{v_r, w} = \langle v_r, \dots, w \rangle$ とする。これら 2 本の道に含まれる頂点を使って、できるだけ長さの短い v_l から v_r へ至る道として $P_{v_l, v_r} = \langle v_l, \dots, v_r \rangle$ をとることにする。 G_S において $dist_{G_S}(v_l, v_r) \geq d+1$ であるので、道 P_{v_l, v_r} の長さも $d+1$ 以上となるはずである。また、 G において $dist_G(u, w) \geq d+1$ であるので、 u と道 P_{v_l, v_r} 上に存在する任意の頂点との間には辺が存在してはいけない。

上記のように頂点と道考えた場合、3 本の道 P_{u, v_l} 、 P_{u, v_r} 、 P_{v_l, v_r} 上に存在する頂点によって誘導される部分グラフの中には長さ $d+3$ 以上の弦を持たない閉路が存在する、すなわち、 G にも長さ $d+3$ 以上の弦を持たない閉路が存在することになる。しかし、 G に存在する長さ $d+3$ 以上のすべての閉路が少なくとも 1 本の弦を持つという仮定をしているため、そのような閉路は存在してはならず、ここに矛盾が生ずる。よって、本定理が成り立つことが証明できる。□

入力グラフ G に存在する長さ $d+3$ 以上のすべての閉路が少なくとも 1 本の弦を持つとき、MAX d -CLAN 問題の最適解を ByFindClique によって求めることができるため、サブルーチン FindClique が多項式時間で動作するようなグラフクラスを入力としたときには、ByFindClique により多項式時間で MAX d -CLAN 問題の最適解を求めることができることになる。

3.1 弦グラフ上での MAX (ODD d)-CLAN 問題

定理 1 より、MAX d -CLAN 問題の入力を弦グラフに限定した場合に次の系が成り立つ。

系 1 入力グラフ G が弦グラフのとき、MAX d -CLAN 問題の最適解を ByFindClique によって求めることができる。

証明：入力グラフ G が弦グラフとすると、 G に存在する長さ 4 以上のすべての閉路が少なくとも 1 本の弦を持つことになる。よって、弦グラフにおける MAX d -CLAN 問題は ByFindClique によって最適解を求めることができる。□

さらに、 d が奇数である場合の MAX d -CLAN 問題について、次の定理が成り立つ。

定理 2 入力グラフ G が弦グラフとすると、奇数 d の場合の MAX d -CLAN 問題の最適解を ByFindClique によって多項式時間で求めることができる。

証明。弦グラフについては最大クリークを発見できる多項式時間アルゴリズムが知られている [11], [12]。また、 d が 3 以上の奇数の場合、弦グラフ G の d 次のべきグラフ G^d を得ると、 G^d もまた弦グラフになることが知られている [1], [3]。これらのことから、弦グラフにおける MAX d -CLAN 問題は、 d が奇数のとき、文献 [11], [12] で示されているアルゴリズムを FindClique として用いた ByFindClique によって多項式時間で最適解を求めることができる。□

3.2 弱弦グラフ上での MAX (ODD d)-CLAN 問題

定義 2 より、弱弦グラフにも長さ 5 以上の弦を持たない閉路が存在しないことは明らかである。また、弱弦グラフにおける最大クリーク問題に対して多項式時間で最適解を求めるアルゴリズムが存在することも知られている [12]。弱弦グラフ G の d 次のべきグラフ G^d は、弦グラフと同様に、 d が奇数のとき、弱弦グラフになるという性質が知られている [7]。よって、次の定理が成り立つ。

定理 3 入力グラフ G が弱弦グラフであるとして、奇数 d の場合の MAX d -CLAN 問題の最適解を ByFindClique によって多項式時間で求めることができる。

3.3 強弦グラフ上での MAX d -CLAN 問題

事実 1 で述べたように、強弦グラフは弦グラフの部分クラスである。また、整数 $d \geq 2$ について、強弦グラフの d 次のべきグラフ G^d もまた強弦グラフとなることが知られている [15]。よって、次の定理を得ることができる。

定理 4 入力グラフ G が強弦グラフであるとして、MAX d -CLAN 問題の最適解を ByFindClique によって多項式時間で求めることができる。

3.4 台形グラフ上での MAX d -CLAN 問題

事実 3(i) で述べたように、台形グラフは弱弦グラフの部分クラスであるので、台形グラフには弦を持たないような

長さ 5 以上の閉路が存在しないことは明らかである。また、台形グラフにおける最大クリーク問題に対して多項式時間で最適解を求めるアルゴリズムが存在することが知られている [12]。また、整数 $d \geq 2$ について、台形グラフの d 次のべきグラフ G^d もまた台形グラフになるという性質も知られている [9]。よって、次の定理が成り立つ。

定理 5 入力グラフ G が台形グラフであるとするとき、MAX d -CLAN 問題の最適解を ByFindClique によって多項式時間で求めることができる。

3.5 区間グラフ上での MAX d -CLAN 問題

事実 3(ii) より、次の定理が成り立つ。

定理 6 入力グラフ G が区間グラフであるとするとき、MAX d -CLAN 問題の最適解を ByFindClique によって多項式時間で求めることができる。

謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金 22700019 および 23500020 による。

参考文献

- [1] G. Agnarsson, R. Greenlaw, M. M. Halldórsson. On powers of chordal graphs and their colorings. *Congr. Numer.*, 144, pp.41–65, 2000.
- [2] Y. Asahiro, E. Miyano, and K. Samizo. Approximating maximum diameter-bounded subgraphs. *Proc. 9th LATIN*, volume 6034 of *LNCS*, pp. 615–626. Springer, 2010.
- [3] R. Balakrishnan and P. Paulraja. Powers of chordal graphs. *Australian J. Mathematics*, Series A, 35, pp.211–217, 1983.
- [4] M. Bellare, O. Goldreich, and M. Sudan. Free bits, PCPs and non-approximability - Towards tight results. *SIAM J. Computing*, 27 (3), pp.804–915, 1998.
- [5] I.M. Bomze, M. Budinich, P.M. Pardalos, and M. Pelillo. The maximum clique problem. *Handbook of Combinatorial Optimization*, Kluwer Academic, pp.1–74, 1999.
- [6] A. Brandstädt, V.B. Le, J. P. Spinrad. *Graph Classes: A Survey*, SIAM, 1999.
- [7] A. Brandstädt, F.F. Dragan, Y. Xiang, C. Yan. Generalized Powers of Graphs and Their Algorithmic Use. *Proc. 10th SWAT*, volume 4059 of *LNCS*, pp. 423–434. Springer, 2006.
- [8] D.G. Corneil and P.A. Kamula. Extensions of permutation and interval graphs. *Congr. Numer.*, 58, pp.267–275, 1987.
- [9] C. Flotow. On powers of m -trapezoid graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 63(2):187–192, 1995.
- [10] U. Feige. Approximating maximum clique by removing subgraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 18, pp.219–225, 2004.
- [11] F. Gavril. Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of a chordal graph. *SIAM Journal on Computing*, 1 (2), pp.180–187, 1972.
- [12] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, 1988.
- [13] J. Håstad. Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$. *Acta Mathematica*, 182 (1), pp.105–142, 1999.
- [14] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*, pp.85–103, 1972.
- [15] A. Lubiw. Γ -free matrices, Masters thesis, Dept. of Combin. and Optim., University of Waterloo, Canada, 1982.
- [16] R.D. Luce. Connectivity and generalized cliques in sociometric group structure. *Psychometrika*, 15, pp.169–190, 1950.
- [17] J. Marínček and B. Mohar. On approximating the maximum diameter ratio of graphs. *Discrete Math.*, 244, pp.323–330, 2002.
- [18] R.J. Mokken. Cliques, clubs and clans. *Quality and Quantity*, 13, pp.161–173, 1979.
- [19] D. Zuckerman. Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. *Theory of Computing*, 3, pp.103–128, 2007.