

最大辺支配問題に対する貪欲法の近似率解析

土中 哲秀^{1,a)} 小野 廣隆^{2,b)}

概要：最大辺支配問題とは、無向重み付きグラフ $G = (V, E)$ において、 E のサイズ k の部分集合でそこに属する辺により支配される辺の重みを最大にするものを求める問題である。この問題は NP 困難であるが、標準的な貪欲法により $(1 - 1/e)$ -近似可能 (e はネイピア数) であることが知られている。本論文では、最大辺支配問題に対する貪欲法型アルゴリズムに対する上記とは異なる解析を行う。標準的な貪欲法を含む 2 種の貪欲法アルゴリズムの解析では、その近似比の下界が k/s (ただし s はグラフ G におけるある極大マッチングのサイズ) であることを示す。これらの解析により、標準的な貪欲法の近似比は、 $\max\{1 - 1/e, k/s^*\}$ となることを示す (s^* は G の最大マッチングのサイズ)。

キーワード：最大辺支配問題, 貪欲法, 近似アルゴリズム, 最小極大マッチング

Approximation ratios of Greedy Algorithms for Max Edge Domination

HANAKA TESSHU^{1,a)} ONO HIROTAKA^{2,b)}

Abstract: Given an undirected and edge-weighted graph $G = (V, E)$ and integer k , Max Edge Domination problem (MaxED) is to find a subset of E that maximizes weight of edges covered by edges in it. This problem is NP-hard, and it is $(1 - 1/e)$ -approximable (e is Napier's constant) by the standard greedy algorithm. In this paper, we analyze two greedy algorithms for MaxED. In the analysis, we show lower bounds on their approximation ratios are both k/s , where s is size of a maximal matching in G . By the application to the analysis of the standard greedy algorithm, we show that its approximation ratio is at least $\max\{1 - 1/e, k/s^*\}$, where s^* is the size of a maximum matching in G .

Keywords: Max Edge Domination, Greedy Algorithm, Approximation Algorithm, Minimum Maximal Matching

1. はじめに

頂点集合 $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$, 辺集合 $E(G) = \{e_{uv} = \{u, v\} \subseteq V(G)\}$ からなる無向重み付きグラフ $G = (V(G), E(G))$ (ただし $|V(G)| = n, |E(G)| = m$) が与えられたとする。 $V(G), E(G)$ はそれぞれ単に V, E で表すこともある。辺 e の重みを w_e とする。辺 e が $e = \{u, v\}$ であるとき、その重みを w_{uv} で表すこともある。 $E' \subseteq E$ に対し

て、 E' にあらわれる点集合を $V(E')$ であらわす。すなわち $V(E') = \bigcup_{e \in E'} e$ である。

辺 e は e 自身と e に隣接する辺を支配するという。グラフ G において辺 e により支配される辺集合を $D_G(e)$ で表す。すなわち、 $D_G(e) = \{e' \in E(G) \mid e' \cap e \neq \emptyset\}$ である。またグラフ G において、辺集合 S により支配される辺集合を $D_G(S) = \{e \in E(G) \mid e \cap V(S) \neq \emptyset\}$ で定義する。グラフ G において、辺集合 S によって支配される辺の総重量を $W_G(S)$ と定義する。つまり、 $W_G(S) = \sum_{e \in D_G(S)} w_e$ である。グラフ G において、 E が支配する辺の総重量は、 G の辺の総重量に等しい ($W(E) = \sum_{e \in E} w_e$)。これらはいずれも添え字 G を省略することがある。

辺に重みのある無向グラフ G における辺集合 E から k

¹ 九州大学 経済学部 経済工学科
Department of Economic Engineering, Kyushu University

² 九州大学大学院 経済学研究院 経済工学部門
Department of Economic Engineering, Kyushu University

a) 1EC10219P@s.kyushu-u.ac.jp

b) hirotaka@en.kyushu-u.ac.jp

本の辺により支配される辺の重さを最大化するように辺を選ぶ問題を最大辺支配問題と言う。この問題は以下のように定式化できる。

$$\max_{K \subseteq E, |K| \leq k} W(K)$$

この問題はよく知られている最小辺支配集合問題、すなわち E のすべての辺を支配する最小の辺集合を求める問題と決定問題の意味ではほぼ等価である。従って、最小辺支配集合問題の NP 困難性から、最大辺支配問題も NP 困難であることがわかる。一方、最大辺支配問題は最大被覆問題の特殊ケースでもある。最大被覆問題は、標準的な貪欲法により最適解の $(1 - 1/e)$ 倍以上の解を必ず得ることができると知られている [4]。このことにより、標準的な貪欲法を用いれば、最大辺支配問題に対しても最適解の $(1 - 1/e)$ 倍以上の解が必ず得られることがわかる。

この近似率 $(1 - 1/e)$ は問題のサイズに依らない普遍的な保証を与える反面、その普遍性のために必ずしも解析が十分ではない側面がある。例えば k が問題サイズに対して十分大きい場合、問題としては最適解の近似が容易になることが予想される。実際、グラフ G の最大マッチングのサイズを $p(G)$ で表すと、 $k \geq p(G)$ の場合、最大辺支配問題の最適解は $W(E)$ となり、後述する標準的な貪欲法により最適解を発見できる。しかしながら、このような場合でも従来の解析では貪欲法の近似率は $(1 - 1/e)$ までしか知られておらず、その解析が不十分であった。これに対し、本研究では新たな解析により、標準的な貪欲法の近似率が $\max\{1 - 1/e, k/s\}$ であることを示す。

本論文の構成は以下の通りである。2 節で最大辺支配問題に深く関連する 2 つの問題、最大被覆問題、最小極大マッチング問題について述べる。3 節では最大辺支配問題に対する 2 種の貪欲法を与え、それぞれ近似比の解析を行う。4 節で結論を述べる。

2. 関連問題

2.1 最大被覆問題

最大被覆問題は以下のように定義される：

入力： $U = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 重み関数 $w : U \rightarrow \mathbb{Q}^+$, 集合族 $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq U\}$ と自然数 k 。

出力： $|S'| = k$ かつ $W(S')$ を最大にするような S' 。

ただし、 $\mathcal{S}$ の部分集合族 $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ に対して、 $U(\mathcal{S}') = \bigcup_{S_j \in \mathcal{S}'} S_j$, $\mathcal{S}'$ の重みを $W(\mathcal{S}') = \sum_{i \in U(\mathcal{S}')} w_i$ で定義する。

最大被覆問題は、以下のような貪欲法で問題例 I の最適値が $OPT(I, k)$ であるとき、必ず $(1 - 1/e)OPT(I, k)$ 以上の目的関数値を達成する解を発見できることが知られている（一般に、アルゴリズム A がある最大化問題の最適値の α 倍以上 ($\alpha \geq 1$) の解を発見することが保証されるとき、 A の近似率は α であると言い、 A は α 近似アルゴリズムであ

ると言う)。

0. $\mathcal{C} := \emptyset, i = 0, U(\mathcal{C}) = \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$ とする。

1. $S \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$ として、 $g_i(S) = \sum_{e \in S \setminus U(\mathcal{C})} w_e$ を計算する。

2. $g_i(S)$ を最大にする S^* をとり、 $\mathcal{C} := \mathcal{C} \cup S^*$ とする。
 $i = k$ なら、 $\mathcal{C}$ を出力し終了。 $i < k$ なら $i := i + 1$ とし、1 にもどる。

一方、最大被覆問題は NP 困難であるのみならず [3], $P \neq NP$ の仮定の下では、 $(1 - 1/e)$ より良い近似率の多項式時間アルゴリズムが存在しないことが示されている [1]。つまり、この貪欲法は $P \neq NP$ の仮定の下で、最大被覆問題に対して最善の近似率を達成するアルゴリズムであると言える。

最大被覆問題と最大辺支配問題の関係について述べる。上述の最大被覆問題の定義において、 $U = E, \mathcal{S} = \{D(e) \mid e \in E\}$ とすると、最大辺支配問題は最大辺被覆問題として記述できることがわかる。このことから、上述の貪欲法は最大辺支配問題に対する、 $(1 - 1/e)$ 近似アルゴリズムであることがわかる。以下、これを貪欲アルゴリズム 0 と呼ぶ。上記貪欲法が最大被覆問題に対する最善のアルゴリズムであったのに対し、最大辺支配問題に対して貪欲アルゴリズム 0 が最善であるかどうかは不明である。これは最大辺支配問題の近似限界が 1979/1980 までしか知られていないためである [5]。

2.2 最小極大マッチング

グラフ $G = (V, E)$ の $M \subseteq E$ において、各辺が互いに端点を共有しない ($\forall e, e' \in M : e \cap e' = \emptyset$) とき、 M はマッチングであるという。またこれ以上辺を追加できないもの ($\forall e \in E : e \cap V(M) \neq \emptyset$) のことを極大マッチング、辺数が最大のものを最大マッチングという。

命題 1. $M \subseteq E$ がグラフ G の極大マッチングならば、 $D(M) = E$ である。また $W(M) = W(E)$ である。

証明。 $D(M) \subseteq E$ が成立するが、 $D(M) \subset E$ は、 $e' \notin D(M) = \{e \in E \mid e \cap V(M) \neq \emptyset\}$, すなわち $e' \cap V(M) = \emptyset$ となる $e' \in E$ が存在することを意味する。これは M の極大性に矛盾するため、 $D_G(M) = E$ となる。これより $W(M) = W(E)$ が成立する。 $\square$

最小極大マッチング問題とは、重み付きグラフ G が与えられたとき、重みが最小となる極大マッチングを見つける問題である。この問題は、NP 困難であり、次数が高々 3 の重みなし平面グラフや 2 部グラフにおいても NP 困難であることが知られている [7]。また近似可能性の観点からは、一般グラフにおいては APX 困難であることが示されている。一方、重みなしの場合には、最大マッチングのアルゴリズムを利用することにより、2 倍近似可能であり、また平面グラフの場合、PTAS が知られている [6]。

グラフに重みのない場合、最小極大マッチング問題と最

小辺支配集合問題は命題 1 より、等価である。したがって、最大辺支配問題も次数が高々 3 の重みなし平面グラフや 2 部グラフでも NP 困難である。

他に関連する問題として、最小辺 (点) 支配集合問題がある。この問題は、重み付きグラフ G が与えられて、辺 (点) をすべて支配する最小の重さの辺 (点) 集合を見つける問題である。最小辺支配集合問題も最小点支配集合問題も NP 困難であるが、最小点支配集合問題が $\Omega(\log n)$ -近似困難であるのに 2 倍近似可能なアルゴリズムが知られている [2]。

3. 最大辺支配問題に対する貪欲アルゴリズム

本節では 2.1 節で紹介した貪欲アルゴリズム 0 以外の 2 種類のアロリズムを提案する。これらは共に近似率 k/s (s はある極大マッチングのサイズ) であり、またその解析が貪欲アルゴリズム 0 の近似率の下界を与えることを示す。

3.1 貪欲アルゴリズム 1

貪欲アルゴリズム 1 は、グラフ G からある辺 e とそれに接続する (e に支配される) 辺を、ある評価値に従い抜いていくアルゴリズムである。

貪欲法アルゴリズム 1 を次のように定める。

貪欲アルゴリズム 1

Step 1. $G = (V, E)$ において、極大マッチング M をとる。 $E_1 := E$, $M_1 := M$, $S_0 = \emptyset$, $\theta := 1$ とする。

Step 2. $\forall e \in M_\theta$ について、評価値

$$\xi_\theta(e) = W_{G_\theta}(\{e\})$$

を計算する。 $\xi_\theta(e)$ を最大にする e を $e(\theta)$ とし、 $S_\theta = S_{\theta-1} \cup \{e(\theta)\}$, $M_\theta = M_{\theta-1} \setminus \{e(\theta)\}$ とする。

Step 3. $\theta = k$ ならば、 S_k を出力して終了。

そうでなければ、 $E_{\theta+1} = E_\theta \setminus D_{G_\theta}(e(\theta))$ とする。

$E_{\theta+1} = \emptyset$ ならば、 S_θ を出力して終了。そうでなければ、 $\theta := \theta + 1$ とし、Step 2. に戻る。

貪欲アルゴリズム 0 との違いは、貪欲アルゴリズム 0 が辺支配集合を E の部分集合として選ぶのに対し、貪欲アルゴリズム 1 は、Step 1. で選んだ極大マッチング M の部分集合として選ぶ点である。

貪欲アルゴリズム 1 の Step 2. で定義される $e(\theta)$ の ξ_θ の値を $\xi_\theta^* = \xi_\theta^*(e(\theta)) = \max\{\xi_\theta(e) \mid e \in M_\theta\}$ とおくと、アルゴリズムにより出力される解 S_k の目的関数値は $\sum_{i=1}^k \xi_i^*$ となる。以下、貪欲アルゴリズム 1 の近似率を解析する。まず次の式が成立する。

$$\xi_\theta^* \geq \frac{W(E) - \sum_{i=1}^{\theta-1} \xi_i^*}{|M| - (\theta - 1)} \quad (1)$$

式 (1) が成立する理由は以下のとおりである：まず、 ξ_i^* は、 $W_{G_i}(e(i))$ 、すなわち $G_i = (V, E_i)$ において辺 $e(i)$ により支配される辺集合 $D_{G_i}(e(i))$ の総重量を表している。 $E_\theta =$

$E \setminus \bigcup_{i=1}^{\theta-1} D_{G_i}(e(i))$ であり、異なる i に対する $D_{G_i}(e(i))$ は互いに共通部分を持たないことから、 $G_\theta = (V, E_\theta)$ の辺重みの総量は $W_{G_\theta}(E_\theta) = W(E) - \sum_{i=1}^{\theta-1} \xi_i^*$ となる。一方、 M_θ は $G_\theta = (V, E_\theta)$ の極大マッチングであるため、命題 1 から $W_{G_\theta}(E_\theta) = W_{G_\theta}(M_\theta)$ となる。 $E_\theta = \bigcup_{e \in M_\theta} D_{G_\theta}(e)$ から、

$$W_{G_\theta}(M_\theta) \leq \sum_{e \in M_\theta} \xi_\theta(e) \leq |M_\theta| \xi_\theta^*$$

であるため、 $|M_\theta| = |M| - (\theta - 1)$ より (1) が成立する。このとき、次の補題が成立する。

補題 1. すべての θ に対して

$$\sum_{i=1}^{\theta} \xi_i^* \geq \frac{\theta}{|M|} W(E) \quad (2)$$

が成立する。

証明. 帰納法により証明する。 $\theta = 1$ のとき、(1) から、 $\xi_1^* \geq W(E)/|M|$ が成立する。 $\theta = \ell$ のとき、式 (2) が成立と仮定する。このとき、式 (1) と併せて、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\ell+1} \xi_i^* &= \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i^* + \xi_{\ell+1}^* \\ &\geq \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i^* + \frac{W(E) - \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i^*}{|M| - \ell} \\ &= \left(1 - \frac{1}{|M| - \ell}\right) \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i^* + \frac{W(E)}{|M| - \ell} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{|M| - \ell}\right) \frac{\ell}{|M|} W(E) + \frac{W(E)}{|M| - \ell} \\ &= \left(1 - \frac{1}{|M| - \ell} + \frac{|M|}{\ell(|M| - \ell)}\right) \frac{\ell}{|M|} W(E) \\ &= \frac{\ell + 1}{|M|} W(E). \end{aligned}$$

よって $\theta = \ell + 1$ においても式 (2) が成立し、帰納法より補題が示された。 $\square$

今、問題例 $I = (G, k)$ の最適値を $OPT(I)$ 、貪欲アルゴリズム 1 によって得られる解の目的関数値を $ALG_1(I)$ で表すと、 $ALG_1(I) = \sum_{i=1}^k \xi_i^*$ である。さらに $OPT(I) \geq W(E)$ 、補題 1 から任意の問題例 I に対して、

$$\frac{ALG_1(I)}{OPT(I)} \geq \frac{\sum_{i=1}^k \xi_i^*}{W(E)} \geq \frac{\theta}{|M|}$$

となる。よって以下の定理が成立する。

定理 1. 貪欲法アルゴリズム 1 は、近似率 $\alpha \geq k/s$ を達成する。ただし、 s はアルゴリズムの Step 1. で選んだ極大マッチングのサイズを表す。

ここで貪欲アルゴリズム 0 の近似率について考察する。まず貪欲アルゴリズム 0 の出力解 (辺集合) の目的関数値が $W(E)$ と等しいとき、これは明らかに最適解を発見している。このため、以下では貪欲アルゴリズム 0 の出力解の目

的関数値が $W(E)$ より真に小さいときを考える。

補題 2. 貪欲アルゴリズム 0 の出力解 (辺集合) の目的関数値が $W(E)$ より真に小さいとき, その出力解 $\{e(1), e(2), \dots, e(k)\}$ がマッチングとなるものが存在する。
証明. 貪欲アルゴリズム 0 の第 i フェーズで選ばれる辺を $e(i)$ で記し, どの j フェーズでも $\{e(1), e(2), \dots, e(j)\}$ がマッチングとなるような $e(j)$ を選べることを示せば十分である。第 j フェーズの段階ではじめてこの条件が満たされない, すなわち, ある $e(i)$ ($i < j$) に対して $e(i) \cap e^* \neq \emptyset$ を満たす e^* が g_j を最大にしたとする (最終的な目的関数値が $W(E)$ より真に小さいため, $g_j(D(e^*)) > 0$ である (カバーされていない辺が存在する)). このとき, $e^* \in D(e(i))$ と $g_j(D(e^*)) > 0$ から, $e' \in D(e) \setminus U(C)$ が存在する ($\{e(1), e(2), \dots, e(j-1), e'\}$ はマッチングとなっている). このとき, $D(e^*) \setminus U(C) \subseteq D(e') \setminus U(C)$ が成立し, $g_j(D(e^*)) \leq g_j(D(e'))$ となるため, 任意の第 j フェーズで e^* のかわりに e' を選べばマッチング性を保つことができる。□

補題 2 より, 貪欲アルゴリズム 0 はある極大マッチング M_0 の辺を g_i の値に従い選んでいることが分かる。 g_i は $g_i(D(e)) = \sum_{e' \in D(e) \setminus U(C)} w_{e'}$ により定義されている。一方, $\xi_i(e) = W_{G_\theta}(\{e\}) = \sum_{e' \in D_{G_\theta}(e)} w_{e'}$ であるが,

$$D_{G_\theta}(e) = D(e) \setminus V \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} D(e(j)) \right)$$

より帰納的に, $g_i(D(e)) = \xi_i(e)$ となることが示せるため, 貪欲アルゴリズム 0 は, 適当な M_0 を選択した貪欲アルゴリズム 1 と全く同じ $\{e(1), e(2), \dots, e(k)\}$ を選ぶこととなる。 M_0 のサイズは最大マッチングのサイズ s^* 以下であるから, 貪欲アルゴリズム 0 の近似率は定理 1 から, k/s^* 以上であることが分かる。

定理 2. 貪欲アルゴリズム 0 は, 近似率 $\max\{1 - 1/e, k/s^*\}$ を達成する。ただし s^* はグラフの最大マッチングのサイズである。

3.2 貪欲法アルゴリズム 2

本節では最大辺支配問題に対するもう一つの貪欲アルゴリズムについて考える。

貪欲アルゴリズム 2

Step 1. $G = (V, E)$ の適当な極大マッチング M をとり ($|M| = s$), $\forall e = \{i, j\} \in M$ に対して以下の評価値を計算する。

$$\begin{aligned} \xi(e) = & \sum_{u \in N(i)} w_{iu} + \sum_{u \in N(i) \setminus V(M)} w_{iu} \\ & + \sum_{u \in N(j)} w_{ju} + \sum_{u \in N(j) \setminus V(M)} w_{ju} \end{aligned}$$

ただし, $N(i)$ は i に隣接する点の集合である。

Step 2. M の辺を ξ の値に従い降順にソートし, 順に $e(1), e(2), \dots, e(s)$ とする。 $K = \{e(1), e(2), \dots, e(k)\}$ を出力する。

アルゴリズムの記述からわかるように, 貪欲アルゴリズム 2 は (十分単純な) 貪欲アルゴリズム 1 よりさらに単純なアルゴリズムであるが, 興味深いことにこのアルゴリズムも近似率 k/s を達成する。

定理 3. 貪欲法アルゴリズム 2 は近似率 k/s を達成する。
証明. 辺 $e = \{p, q\}$ は (1) $e \in M$, (2) $e' \notin M$ かつ $|e \cap V(M)| = 1$, (3) $e \notin M$ かつ $|e \cap V(M)| = 2$ のいずれかを満たす ($|e \cap V(M)| = 0$ は M の極大性に反する). 各 w_e が ξ にどのように現れるか考える。(1) のとき, w_e は $\xi(e)$ でしか現れない。このとき w_e は $\sum_{u \in N(p)} w_{pu}$ と $\sum_{u \in N(q)} w_{qu}$ の 2 回, 和をとられる。(2) のとき e はある $e' = \{p, i\} \in M$ としか共通部分をもたないため, w_e は $\xi(e')$ でしか現れない。このときの w_e は $\xi(e')$ の $\sum_{u \in N(i)} w_{iu}$ と $\sum_{u \in N(i) \setminus V(M)} w_{iu}$ の 2 回, 和をとられる。(3) のとき e は $e' = \{p, i\}$, $e'' = \{q, j\}$ と共通部分をもつ。このとき, $p, q \in V(M)$ である。よって, w_e は $\xi(e')$ の $\sum_{u \in N(i)} w_{iu}$, $\xi(e'')$ の $\sum_{u \in N(j)} w_{ju}$ の計 2 回和をとられる。以上より, いずれの w_e も全 ξ において 2 回加算されるため, 以下が成立する。

$$\sum_{e \in M} \xi(e) = 2W(M)$$

また, 命題 1 より $W(M) = \sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}$ であるから, 最適解を W^* とすると

$$\sum_{e \in M} \xi(e) = 2W(M) = 2W(E) \geq 2W^*$$

また, $\xi(1) \geq \xi(2) \geq \dots \geq \xi(k) \geq \dots \geq \xi(s)$ であるから,

$$\frac{\sum_{i=1}^k \xi(e(i))}{k} \geq \frac{\sum_{e \in M} \xi(e)}{s} \geq \frac{2W^*}{s}$$

が成立する。これらを併せると以下が得られる。

$$2W(K) \geq \sum_{e \in K} \xi(e) \geq \frac{k \cdot 2W^*}{s}$$

よって, アルゴリズム出力解の目的関数値 $W(K)$ に関して以下が成立するため, 本定理が証明される。

$$\frac{W(K)}{W^*} \geq \frac{k}{s}$$

□

4. おわりに

本研究では, 最大辺支配問題に対する 2 種の貪欲アルゴリズムの近似率解析を行った。この解析により, 2 種の貪欲アルゴリズムの近似率が共に k/s 以上であることがわかった (s は問題のグラフのある極大マッチングのサイズ)。

この結果から、(最大辺支配問題を一般化した問題である) 最大被覆問題に対する既存の貪欲アルゴリズムの近似率も k/s 以上となることが示された。これにより既存の貪欲アルゴリズムの近似率が $\max\{1 - 1/e, k/s\}$ 以上となる。貪欲アルゴリズムはその自然な性質からより高度なアルゴリズムのサブルーチン等に使われることがしばしばあるため、本解析がそのようなアルゴリズムの解析の助けになることを期待している。

謝辞 本研究は科学研究費補助金 21680001, 23104511, 23310104 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] U. Feige, “A Threshold of $\ln n$ for Approximating Set Cover”, *Journal of ACM*, 45, 4, pp. 634–652, 1998.
- [2] 藤戸 敏弘, 永持 仁, “辺支配集合問題の 2 倍近似アルゴリズム”, 電子情報通信学会技術研究報告. COMP, コンピューテーション, 99, 724, pp. 57– 63, 2000.
- [3] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Co., 1979.
- [4] D. S. Hochbaum, “Approximating Covering and Packing Problems: set cover, vertex cover, independent set, and related problems”, in *Approximation algorithms for NP-hard problems* (D.S. Hochbaum, ed), pp. 94–143, 1997.
- [5] E. Miyano and H. Ono, “Max Domination Problem”, manuscript.
- [6] H. Nagamochi, Y. Nishida and T. Ibaraki, “Approximability of the Minimum Maximal Matching Problem in Planar Graphs”, *IEICE transactions on fundamentals of electronics, communications and computer sciences*, E86-A(12), pp. 3251–3258, 2003.
- [7] M. Yannakakis and F. Gavril, “Edge Dominating Sets in Graphs”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38, 3, pp. 364–372, 1980.