ロータールーターモデルの設計手法の提案

白髪丈晴[†1]　山内由紀子[†1]
来嶋秀治[†1]　山下雅史[†1]

ロータールーターモデルとは, グラフの各頂点上にあらかじめ定められた隣接点の順番従ってトークンを隣接点に発射するモデルである. 近年, ロータールーターモデルを用いたランダムウォークの脱乱択化ついて研究が行われている.

ランダムウォークとロータールーターモデルの差異を計る指標として単一頂点誤差の研究がある[2]. 頂点数 n 枝数 m の任意のグラフに対し, 対応するマルコフ連鎖の遷移確率行列が非負の固有値のみをもつときに, 単一頂点誤差が $O(mn)$ であることをが示されている[5]. しかし従来モデルでは, 推移確率の表現に比例した誤差が生じるという問題があった.

本研究では, 無理数の推移確率にも対応できる新しいモデルを提案する. 提案手法による推移比率が漸近的に推移確率に一致することを示す.

Proposal of design method of rotor-router model

Takeharu Shiraga,[†1] Yukiko Yamauchi,[†1]
Shuji Kijima[†1] and Masahumi Yamashita[†1]

The rotor-router model is a model, in which every vertex launches tokens into adjacent vertices according do a prescribed order defined for each vertex. Recently, deterministic random walk, possibly emulating a random walk by a deterministic process, has been investigated. Kijima, Koga, and Makino (2012) showed that the discrepancy on any node at any time is bounded by $O(mn)$ whenever the corresponding transition matrix has nonnegative eigenvalues only[5]. Kijima-Koga-Makino model handles only rational transition probabilities.

In this paper, we devise a new model which can handle transition probabilities of real numbers. We show that the distributing ratio to adjacent vartices approaches asymptotically to transition probabilities.

1. はじめに

ランダムウォークの脱乱択化とは, 決定的過程によって, ランダムウォークを模倣しようという試みである.

Cooper と Spencer[2] は, 2000 年ごろ James Propp によって提案された複数トークン型のロータールーターモデルについて研究し, 各頂点におけるロータールーターモデルとランダムウォークのトークン数の誤差の期待値（単一頂点誤差）の解析を行った. 彼らは d 次元の整数格子点 Z^d に対して, 偶奇性条件を満たす任意の初期トークン配置, 任意のロータールーター, 任意の頂点, 任意の時間について, 単一頂点誤差は次元 d のみに依存し, 総トークン数には依存しない定数 c_d で押さえられることを示した.

また, 来嶋, 古賀, 牧野[5] は, 頂点数 n, 枝数 m の強連結な有向多重グラフについて, 対応するマルコフ連鎖の遷移確率行列が非負の固有値のみを持つ場合に, 任意の初期トークン配置とロータールーターに対して, 単一頂点誤差が $O(mn)$ で押さえられることを示した.

本稿では, 従来のモデルに対し 2 進小数を用いた新たなモデルを提案し, 実験を行った. このモデルでは, 従来のモデルが遷移比率を定めるのに多重辺を用い, また周期的な動きに多重辺が関係していたことに対し, 多重辺を用いないため周期性が現れにくいことが予想される. そして従来モデルで扱える遷移比率は有理数のみだが, 新しいモデルでは無理数の遷移比率も扱うことができるため, 模倣出来るランダムウォークの種類が広がった. 提案モデルにおいてはトークンの隣接頂点への推移比率の誤差が $O\left(\frac{\log z}{z}\right)$ で抑えられることを示した. ただし z はある頂点が発射したトークン数の全期間の総和を表す. また従来モデルでの実験を行い, $n \times n$ 二次元格子上でトークンの分布が振動し収束しない例を設計した.

2. ランダムウォーク

2.1 ランダムウォークに関する用語と記法

確率過程 $\{X_t; t = 0, 1, 2...\}$ と, 状態空間 $S = \{1, 2, 3, ...\}$ に対し, 全ての $t \geq 0$ と全ての $j \in S$ に対し,

$$P\{X_{t+1} = j | X_0, X_1, ...X_t\} = P\{X_{t+1} = j | X_t\} \quad (1)$$

が成り立つとき, 確率過程 $\{X_t; t = 0, 1, 2...\}$ のことをマルコフ連鎖 (ランダムウォーク) と

†1 九州大学
Kyushu University

© 2012 Information Processing Society of Japan

いう. これは, 確率過程の時刻 $t+1$ における状態 X_{t+1} は 1 ステップ前の状態 X_t のみに依存して決まることを表している. ここで状態 $i,j \in S$ に対し $P\{X_{t+1}=j|X_t=i\}$ を $P(i,j)$ と書き, $P(i,j)$ を i 行 j 列に並べて出来る行列を遷移確率行列 P とする. $\sum jP(i,j)=1$ である. 状態空間 $S=\{1,2,3,...\}$ をグラフの頂点と考えると, $P(i,j)$ は $e=(i,j)$ にそった頂点間の遷移確率となる. 任意の状態 i,j に対し, $P^t(i,j)>0$ となる t が存在する時, このランダムウォークは既約であるという. 任意の状態 i,j に対し, $\gcd\{t:P^t(i,j)>0\}=1$ となる時, このランダムウォークは非周期的であるという. ここで, gcd は最大公約数を表す. 既約かつ非周期的なマルコフ連鎖はエルゴード的であるという. 遷移確率行列 P に対し,

$$\pi = \pi P \tag{2}$$

を満たすような確率分布 π が存在する時, π を P の定常分布と呼ぶ. ランダムウォークが既約であれば, 定常分布は一意に定まる.

時刻 0 における分布を $\pi^{(0)} = (\pi^{(0)}_{v_1},...,\pi^{(0)}_{v_n})$ とすると, 遷移確率行列 P を使って $\pi^{(1)}=\pi^{(0)}P$ と書ける. 同様に時刻 t の時の分布 $\pi^{(t)}$ は, $\pi^{(t)}=\pi^{(t-1)}P$ を満たす. この式を繰り返し用いることで, $\pi^{(t)}=\pi^{(0)}P^t$ が成り立つ. $\pi^{(t)}$ が $t\to\infty$ の時, 初期分布 $\pi^{(0)}$ に関わらずある一定の分布 π に近づくならば, π を P の極限分布という. ランダムウォークがエルゴード的であれば, 極限分布は必ず存在する. 極限分布 π は $\pi=\pi P$ を満たしているから, 極限分布が存在すればそれは定常分布と一致する.

今, M 個のトークンをそれぞれ遷移確率行列 P に従ってグラフ G 上を遷移させるモデルを考える. 時刻 0 におけるトークンの配置を $\mu^{(0)}=(\mu^{(0)}_{v_1},...,\mu^{(0)}_{v_n})$ とすると, 時刻 1 でのトークンの配置の期待値 $\mu^{(1)}$ は $\mu^{(1)}=\mu^{(0)}P$ で求められる. 時刻 t でのトークンの期待配置 $\mu^{(t)}=\mu^{(t-1)}P$ であり, $\mu^{(t)}=\mu^{(0)}P^t$ で求められる. P に極限分布 π が存在するならば $t\to\infty$ で $\mu^{(t)}$ は πM に近づく.

2.2 訪問時間

$G=(V,E)$ 上のランダムウォークで, $u\in V$ から出発したトークンがグラフ上の全ての頂点を訪問するのにかかるステップ数の期待値を $C_u(G)$ とする. このとき, $C(G)$ を

$$C(G) := \max_{u\in V} C_u(G) \tag{3}$$

と定義する.

2.3 標準ランダムウォーク

$G=(V,E)$ 上の標準ランダムウォークを, 以下の遷移確率行列 $P(u,v)$ を, で定義する.

$$P(u,v)=\begin{cases} \frac{1}{\deg(u)} & (v\in N(u)) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases} \tag{4}$$

2.4 β ランダムウォーク

グラフ $G=(V,E)$ 上で, 遷移確率 $P^{(\beta)}(u,v)$ $(u,v\in V)$ を

$$P^{(\beta)}(u,v)=\frac{\deg(v)^{-\beta}}{\sum_{w\in N(u)}\deg(w)^{-\beta}}\ u\in V, v\in N(u) \tag{5}$$

と定義する.$\beta=0$ のとき, 標準ランダムウォークの遷移確率となることに注意が必要である. このランダムウォークで $\beta=1/2$ としたとき, 任意の n 個の頂点をもつグラフ G に対して $C(G)$ が $O(n^2\log n)$ であることが知られている[4].

定理 2.1. [4] 任意のグラフ $G=(V,E)$ に対し, β ランダムウォークは

$C(G)=O(n^2\log n)$

を満たす.

3. ローターループーターモデル

3.1 Kijima-Koga-Makino によるモデル

Kijima-Koga-Makino モデルでは, 有理数の遷移確率行列 P に対して, 有向多重グラフ上の標準ランダムウォークを考える.

有向多重グラフ $G=(V,E)$ は頂点集合 V と枝集合 E を持ち, $n=|V|$, $m=|E|$ とする. G は強連結と仮定する. グラフ G 上の頂点 $v\in V$ から出る枝の終端点の多重集合を $N(v)$ とし, $\delta(v)=|N(v)|$ とする.

今, グラフ G 上の標準ランダムウォークを,

$$P(u,v)=\frac{|\{a\in E|a=(u,v)\}|}{\delta(u)} \tag{6}$$

で定義される遷移確率行列 P に従ってトークンを移動させるものとする.

命題 3.1. (6) で定義されるランダムウォークは, 自己ループ辺を 1 つ以上持つ場合, エルゴード的である.

証明. グラフが強連結であるから, 任意の 2 頂点間に有向路が存在する. 有向路上の遷移確率 P は正だから, グラフが強連結ならばマルコフ連鎖は既約である.

既約であるから, 任意の頂点 v から自己ループ辺を持つ頂点 u へ a ステップで遷移する確率が正になる a, u から任意の頂点 x へ b ステップで遷移する確率が正になる b がそれぞ

© 2012 Information Processing Society of Japan

れ存在する. 頂点 u は自己ループ辺を持ち, c ステップループ出来るから, $t = a + b + c$ が $P^t(v, x) > 0$ を満たし, c は任意に選べるため, t の最大公約数は 1 になり, 非周期的である. □

(6) で定義されるランダムウォークは, 自己ループ辺を 1 つ以上持つ場合エルゴード的なので, 唯一の極限分布 π が存在し, M 個のトークンを遷移させる場合, $t \to \infty$ でトークンの期待配置は πM に近づく.

Kijima-Koga-Makino モデルは, 複数トークン型の有向多重グラフ上の標準ランダムウォークの期待配置を模倣することを目的とした決定的過程である. Kijima-Koga-Makino モデルでは, 有向多重グラフの各頂点 $v \in V$ において, 隣接点の多重集合 $N(v)$ 上に順序 $\rho_v(0), ..., \rho_v(\delta(v) - 1)$ が定められている. 任意の i について, $\rho_v(i) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_v(i \bmod \delta(v))$ と定義する. 順序 ρ_v を v のロータールーターと呼ぶ. v 上にあるトークンは, この順序 ρ_v に従って隣接点へ発射される.

$\chi_v^{(t)}$ をグラフの各頂点 $v \in V$ における時刻 t でのトークンの総数とすると, v 上のロータールーターは時刻 t において $\chi_v^{(t)}$ 個のトークンを隣接頂点に移動させる. つまり, 時刻 $t = 0$ において, v 上のロータールーターは時間 $(0, 1)$ の間に v 上にある $\chi_v^{(0)}$ 個のトークンについて, $j(j \in \{1, ..., \chi_v^{(0)}\})$ 番目のトークンをそれぞれ $\rho_v(j - 1) \in N(v)$ に移動させ, 時刻 $t = 1$ を迎える. 再帰的に, 時刻 t において, v 上のロータールーターは時間 $(t, t + 1)$ の間に v 上にある $\chi_v^{(t)}$ 個のトークンについて, $j(j \in \{1, ..., \chi_v^{(t)}\})$ 番目のトークンをそれぞれ $\rho_v(\sum_{s=0}^{t-1} \chi_v^{(s)} + j - 1) \in N(v)$ に移動させ, 時刻 $t + 1$ を迎える.

3.2 単一頂点誤差

今, 単一頂点誤差を, 各頂点 $w \in V$ と時刻 $T > 0$ に対し, $\left|\chi_w^{(T)} - \mu_w^{(T)}\right|$ と定義する. 各頂点における複数トークン型ランダムウォークのトークンの期待配置 $\mu^{(t)}$ と, ロータールーターモデルのトークン配置 $\chi^{(t)}$ の差を表わしている.

単一頂点誤差について, 以下の定理が成り立つ[5].

定理 3.1. [5] 行列 P の全ての固有値が非負の時, 任意の初期トークン配置, 任意のロータールーターについて,

$$\left|\chi_w^{(T)} - \mu_w^{(T)}\right| < 4mn + O(m)$$

が任意の $w \in V$ と $T \geq 0$ について成り立つ.

定理 3.2. [5] ある有向グラフと初期トークン配置並びに初期トークン配置が存在して, 任意の $w \in V$ と無限の T について,

$$\left|\chi_w^{(T)} - \mu_w^{(T)}\right| = \Omega(m)$$

が成り立つ.

3.3 訪問時間

R を定義しうる全ての順序 ρ の集合とする. $G = (V, E)$ の各頂点にある順序 $\rho_u(u \in V)$ を定め, $u \in V$ から出発したトークンがグラフ上の全ての頂点を訪問するのにかかるステップ数を $C_{u,\rho}(G)$ とする. このとき $DC(G)$ を

$$DC(G) := \max_{u \in V} \max_{\rho \in R} C_{u,\rho}(G) \tag{7}$$

と定義する.

Holroyd と Propp[1] は, ロータールーターモデルに関し, 対応するランダムウォークに関連する値を用いた定理を示した. $v \in V$ に対し,

$$K(v) := \max_{v \in V} H(u, v) + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta(v)}{\pi_v} + \sum_{i,j \in V} \delta(i) P(i, j) |H(i, v) - H(j, v) - 1|\right)$$

と定義する. ここで $H(u, v)$ は対応するランダムウォークにおいて, 頂点 u を出発したトークンが v に到達するのにかかるステップ数の期待値である. このとき, 以下の定理が成り立つ.

定理 3.3. [1] 任意のロータールーターモデル, $v \in V$, t について,

$$|\pi_v - N_t(v)/t| \leq K(v)\pi_v/t$$

が成り立つ.

ここで $N_t(v)$ は時刻 t までに頂点 v を訪れたトークンの総数を表す. この定理は, 任意のロータールーター, 初期トークン位置に関して, $N_t(v)$ と対応するランダムウォークの定常分布との関係を示している.

4. 新しいモデルの提案

本章では, ロータールーターの与え方に関して, 新たな設計法モデルを提案する. 提案モデルでは従来手法では実験できなかった無理数の推移確率の模倣が実験できる.

4.1 提案モデル

自然数 $i = 0, 1, 2, 3, ...$ の二進数表記 $(0)_2, (1)_2, (10)_2, (11)_2, ...$ に対し, $f(i)$ を, $(0)_2$,

© 2012 Information Processing Society of Japan

$(0.1)_2$, $(0.01)_2$, $(0.11)_2$, ... と定義する. より正確には, f は与えられた自然数 $i=\sum_{j=0}^{N} a_j 2^j$ に対し, $\sum_{j=0}^{N} a_j 2^{-(j+1)}$ を返す関数である. ただし a_j は i の二進数表記 $a_N a_{N-1}...a_1 a_0$ の各位の値であり, 0 もしくは 1 である. N は $N=\lfloor \log_2 i \rfloor$ を満たす整数である.

グラフの各頂点 v において $f_v(i)$ を定め, $f_v(i)$ に従ってトークンが遷移するモデルを考える. v の隣接頂点の集合 $N(v)=\{u_1,u_2,...,u_{\delta(v)}\}$ に対し, 区間 $[a^{u_i}, b^{u_i})$ を定義する. ここで, $a^{u_1}=0$, $a^{u_i}<b^{u_i}$, $b^{u_i}=a^{u_i+1}$, $b^{u_{\delta(v)}}=1$ とする. グラフ上のトークンは, $a^{u_i} \le f(i) < b^{u_i}$ を満たす頂点 u_i へ移動する. 時刻 $t=0$ において, 頂点 v 上にある $\chi_v^{(0)}$ 個のトークンについて, $1,...,\chi_v^{(0)}$ 番目のトークンは, それぞれ $f_v(0),...,f_v(\chi_v^{(0)}-1)$ の値に従って, 隣接頂点へ移動する. 再帰的に, 時刻 t において, v 上の $j(j\in\{1,...,\chi_v^{(t)}\})$ 番目のトークンは, $f_v(\sum_{s=0}^{t-1}\chi_v^{(s)}+j-1)$ の値に従って隣接頂点へ移動し, 時間 $(t,t+1)$ の間に $\chi_v^{(t)}$ 個のトークン全てを隣接点へ移動させ, 時刻 $t+1$ を迎える.

4.2 遷移比率の差異

本節では無理数の遷移確率をもつランダムウォークと, 3.1 節で定義された提案モデルを比較し, 遷移比率の差異について議論する.

まず $F(z)=\{f(i) \mid 0\le i<z\}$, $I_{ab}(z)=\{c \mid a\le c<b, c\in F(z)\}$ と定義する. ここで a,b は $0\le a,b<1, a<b$ を満たす実数である. この時, 以下の定理が成り立つことを証明する.

定理 4.1. 任意の整数 $z>0$ に対し,

$$\left|\frac{|I_{ab}(z)|}{z}-(b-a)\right| < \frac{2\lfloor \lg z\rfloor+1}{z} = O\left(\frac{\log z}{z}\right)$$

が成り立つ.

定理 3.2.1 を示すため, 以下の 2 つ補題を示す.

補題 4.1. 任意の自然数 p, $0\le\alpha<2^p$ に対して

$$f(2^p+\alpha)=\frac{1}{2^{p+1}}+f(\alpha)$$

が成り立つ.

証明. $\log_2\alpha<p$ だから, $2^p+\alpha$ は $2^p+\sum_{j=0}^{p-1}a_j2^j$ と書ける. これは $\sum_{j=0}^{p}a_j2^j(a_p=1)$ であるから,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=0}^{p}a_j2^j\right) &= \sum_{j=0}^{p}a_j2^{-(j+1)} \\ &= \frac{1}{2^{p+1}}+\sum_{j=0}^{p-1}a_j2^{-(j+1)} \\ &= \frac{1}{2^{p+1}}+f(\alpha) \end{aligned}$$

を満たす. □

補題 4.2. 任意の自然数 p について

$$F(2^p)=\left\{\frac{0}{2^p},\frac{1}{2^p},...,\frac{2^p-1}{2^p}\right\}$$

が成り立つ.

証明. p に関する帰納法で示す.

$p=0$ のとき, $z=1$ となるので, $F(1)=0$ で条件を満たす.

$p=k$ のとき, $z=2^k$ であり, $F(2^k)=\{\frac{0}{2^k},\frac{1}{2^k},...,\frac{2^k-1}{2^k}\}$ であると仮定する. $F'=\{f(i) \mid 2^k\le i<2^{k+1}\}$ を考えると, 補題 4.1 より, $F'=\{\frac{1}{2^{k+1}}+f(i) \mid 0\le i<2^k\}$ となる. $F(2^{k+1})$ は $F(2^k)$ と F' の和集合である. よって, $F(2^{k+1})=\{\frac{0}{2^{k+1}},\frac{1}{2^{k+1}},...,\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\}$ が成り立ち, 任意の自然数 p に対し補題 4.2 が成り立つことが示された. □

4.2.0.1 定理 3.2.1 の証明

補題 4.1 より, $\frac{s}{2^p}<a\le\frac{s+1}{2^p}$, $\frac{t}{2^p}<b\le\frac{t+1}{2^p}$ となるような $0\le s,t<2^p$ が存在する. この時, $I_{ab}(2^p)=t-s$ であるから,

$$(b-a)2^p-1<|I_{ab}(2^p)|<(b-a)2^p+1 \tag{8}$$

が成り立つ.

いま, $z=2^p+\alpha(0\le\alpha<2^p)$ の場合を考える. $F(\alpha)$ の α 個の要素を小さい順に並べ, $\{\frac{i_0}{2^p},\frac{i_1}{2^p},...,\frac{i_k}{2^p},\frac{i_{k+1}}{2^p},...,\frac{i_l}{2^p},\frac{i_{l+1}}{2^p}.,..,\frac{i_{\alpha-1}}{2^p}\}$ と書く. また, l,k を $\frac{i_k}{2^p}<a\le\frac{i_{k+1}}{2^p}$, $\frac{i_l}{2^p}<b\le\frac{i_{l+1}}{2^p}$ を満たす整数とする. $F'=\{f(i) \mid 2^p\le i<2^p+\alpha\}$, $I'_{ab}=\{c \mid a\le c<b, c\in F'\}$ とする. 補題 4.2

$$F'=\left\{c_j \mid c_j=\frac{i_j}{2^p}+\frac{1}{2^{p+1}}, 0\le j<\alpha\right\} \tag{9}$$

© 2012 Information Processing Society of Japan

が成り立つ. このとき, $c_{l+1} > \frac{i_{l+1}}{2^p} \geq b$,

$$\begin{aligned} c_{k-1} &= \frac{i_{k-1}}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} \\ &< \frac{i_{k-1}}{2^p} + \frac{1}{2^p} \\ &\leq \frac{i_k}{2^p} \\ &< a \end{aligned}$$

だから, $\{c_i \mid i \leq k-1, i \geq l+1\}$ が I'_{ab} に含まれることはない. 同様の議論で

$$\begin{aligned} c_{l-1} &= \frac{i_{l-1}}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} \\ &< \frac{i_{l-1}}{2^p} + \frac{1}{2^p} \\ &\leq \frac{i_l}{2^p} \\ &< b \end{aligned}$$

$c_{k+1} > \frac{i_{k+1}}{2^p} \geq a$ だから, $\{c_i \mid k+1 \leq i \leq l-1\}$ は I'_{ab} に必ず含まれる. よって, $c_k < a$ かつ $c_l < b$, もしくは $c_k \geq a$ かつ $c_l \geq b$ のとき $|I'_{ab}| = |I_{ab}(\alpha)|$ $c_k < a$ かつ $c_l \geq b$ のとき $|I'_{ab}| = |I_{ab}(\alpha)| - 1$, $c_k \geq a$ かつ $c_l < b$ のとき $|I'_{ab}| = |I_{ab}(\alpha)| + 1$ が成り立つ.

以上の議論から $|I_{ab}(\alpha)|-1 \leq |I'_{ab}| \leq |I_{ab}(\alpha)|+1$ であり, $|I_{ab}(2^p+\alpha)| = |I_{ab}(2^p)|+|I'_{ab}|$ だから,

$$|I_{ab}(2^p)| + |I_{ab}(\alpha)| - 1 \leq |I_{ab}(2^p + \alpha)| \leq |I_{ab}(2^p)| + |I_{ab}(\alpha)| + 1 \tag{10}$$

を得る. (8) と (10) から,

$$(b-a)2^p + |I_{ab}(\alpha)| - 2 < |I_{ab}(2^p + \alpha)| < (b-a)2^p + |I_{ab}(\alpha)| + 2 \tag{11}$$

が成り立つ.

いま, $z = \sum_{j=0}^{N} a_j 2^j (N = \lfloor \lg z \rfloor)$ とすると, $|I_{ab}(z)|$ に関して,

$$\begin{aligned} |I_{ab}(z)| &= \left| I_{ab}\left(\sum_{j=0}^{N} a_j 2^j \right) \right| \\ &= \left| I_{ab}\left(a_N 2^N + \sum_{j=0}^{N-1} a_j 2^j \right) \right| \\ &< a_N \cdot (b-a)2^N + 2 + \left| I_{ab}\left(\sum_{j=0}^{N-1} a_j 2^j \right) \right| \\ &< a_N \cdot (b-a)2^N + 2 + \left| I_{ab}\left(a_{N-1} 2^{N-1} + \sum_{j=0}^{N-2} a_j 2^j \right) \right| \\ &< \sum_{j=N-1}^{N} a_j \cdot \left((b-a)2^j + 2 \right) + \left| I_{ab}\left(\sum_{j=0}^{N-2} a_j 2^j \right) \right| \\ &< \cdots \\ &< \sum_{j=1}^{N} a_j \cdot \left((b-a)2^j + 2 \right) + \left| I_{ab}\left(\sum_{j=0}^{0} a_j 2^j \right) \right| \\ &< \sum_{j=1}^{N} a_j \cdot \left((b-a)2^j + 2 \right) + a_0 (b-a)2^0 + 1 \\ &= \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot \left((b-a)2^j + 2 \right) - 1 \end{aligned}$$

である. 同様に $\sum_{j=0}^{N} a_j \{(b-a)2^j - 2\} + 1 < |I_{ab}(z)|$ が導け, $z = \sum_{j=0}^{N} a_j 2^j$ であることを利用すると,

$$\begin{aligned} \frac{|I_{ab}(z)|}{z} - (b-a) &< \frac{\sum_{j=0}^{N} a_j \{(b-a)2^j + 2\} - 1}{\sum_{j=0}^{N} a_j 2^j} - (b-a) \\ &= \frac{2\sum_{j=0}^{N} a_j - 1}{z} \\ &\leq \frac{2\lfloor \lg z \rfloor + 1}{z} \end{aligned}$$

である. 同様に $\frac{-2\lfloor \lg z \rfloor - 1}{z} < \frac{|I_{ab}(z)|}{z} - (b-a)$ が導け,

$$\left| \frac{|I_{ab}(z)|}{z} - (b-a) \right| < \frac{2\lfloor \lg z \rfloor + 1}{z}$$

© 2012 Information Processing Society of Japan

が成り立つ.

4.3 新モデルの周期性について

新モデルが必ずしも Kijima-Koga-Makino モデルの拡張ではないことを述べる. 自然数 i に対し $g(i)$ を, $a_k \leq f(i) < b_k$ のとき, $g(i) = k$ と定義する. 区間 $[a_i, b_i)(0 \leq i \leq 2)$ に対して $a_0 = 0, b_0 = a_1 = 1/3, b_1 = a_2 = 2/3, b_2 = 1$ を考える.

$g(i) : 0 \leq i < 8$ と $g(i) : 8 \leq i < 16$ を比べると, ほとんどの $i(0 \leq i < 8)$ で $g(i) = g(i+8)$ が成り立っているが, $i = 5$ の時 $g(5) \neq g(13)$ となっている.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$g(i)$	0	1	0	2	0	1	1	2	0	1	0	2	0	$\underline{2}$	1	2

同様に, $g(i) : 0 \leq i < 16$ と $g(i) : 16 \leq i < 32$ を比べると, ほとんどの $i(0 \leq i < 8)$ で $g(i) = g(i + 16)$ が成り立っているが, $i = 10$ の時, $g(10) \neq g(26)$ となっている.

i	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
$g(i)$	0	1	0	2	0	1	1	2	0	1	$\underline{1}$	2	0	2	1	2

補題 4.1 より, 新しく発射する $2^p \leq i < 2^{p+1}$ 個目のトークンは今までに発射された $0 \leq i < 2^p$ 個目のトークンを $\frac{1}{2^{p+1}}$ ずらした座標に発射される. 1/3 や 2/3 は $\frac{c}{2^p}(0 \leq c \leq 2^p - 1)$ で表すことができないので, p を増やしていったときに今回のように区間をまたぐトークンが出てくることがある.

5. 新モデルの実験

3.1 節で提案したモデルを用いて実験を行った.

5.1 実験方法と結果

従来モデル, 提案モデル, ランダムウォークの比較を行った. 従来モデルは多重辺を含まないもの, 提案モデル, ランダムウォークでは, 完全グラフ, 閉路グラフ, 星グラフ, ハイパーキューブに関して, 区間は各隣接頂点に対し等間隔に分割した. 隣接頂点の集合 $N(v) = \{u_1, u_2, ..., u_{\delta(v)}\}$ の順序は, 各グラフの頂点に番号をつけ, 番号順の順序で定義した. 提案モデルに関しては, 順序をランダムに入れ替えたものでも実験を行った.

また, ロリポップグラフに対し, 提案モデルを用い, β ランダムウォークの遷移比率に対応する区間に分割し実験を行った. 従来モデルでは無理数の遷移確率に対応していないため, β ランダムウォークの遷移比率は模倣出来ないことに注意する.

初期トークン配置は星グラフは中心の頂点, ロリポップグラフは道グラフと完全グラフが接続する頂点に隣接する頂点で実験を行った.

ランダムウォークは 1000 回訪問時間を計測し, その平均値を記録している. 順序ランダマイズは各隣接頂点の集合の順序を 1000 パターンランダムに定義し, その中で最も時間のかかったものを記録している.

グラフの種類	標準ランダムウォーク (理論値)	従来モデル (理論値)[6]	提案モデル (実験値)	提案モデル 順序ランダム (実験値)
完全グラフ	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$
閉路グラフ	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$O(n)$	$O(n^2)$
星グラフ	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n)$	$O(n)$	$O(n)$
ハイパーキューブ	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log^2 n)$	$O(n \log^2 n)$	$O(n \log^2 n)$

表 1 訪問時間に関する既存研究[6] と実験から推測される上界 n はグラフの頂点数

標準ランダムウォーク (理論値)	従来モデル (理論値)[6]	β ランダムウォーク (理論値)[4]	提案モデル (β) (実験値)	提案モデル (β) 順序ランダム (実験値)
$O(n^3)$	$\Theta(n^3)$	$O(n^2 \log n)$	$O(n^2 \log n)$	$O(n^2 \log n)$

表 2 ロリポップグラフ訪問時間と実験値から推測される上界

© 2012 Information Processing Society of Japan

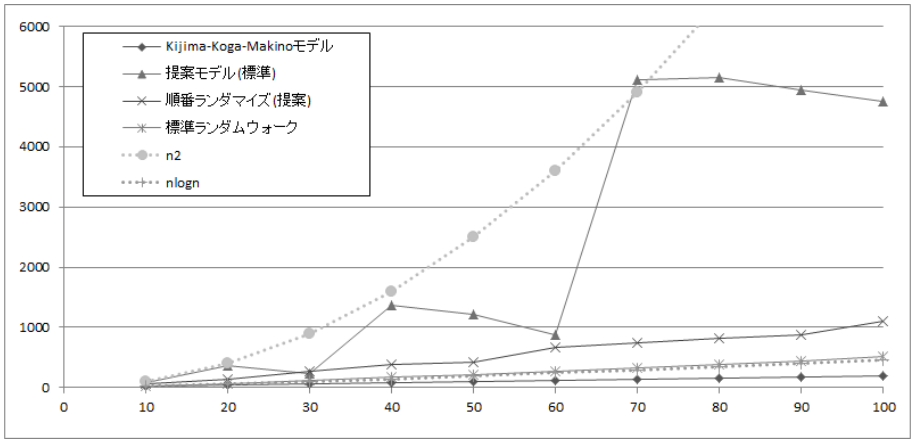

図 1 完全グラフ

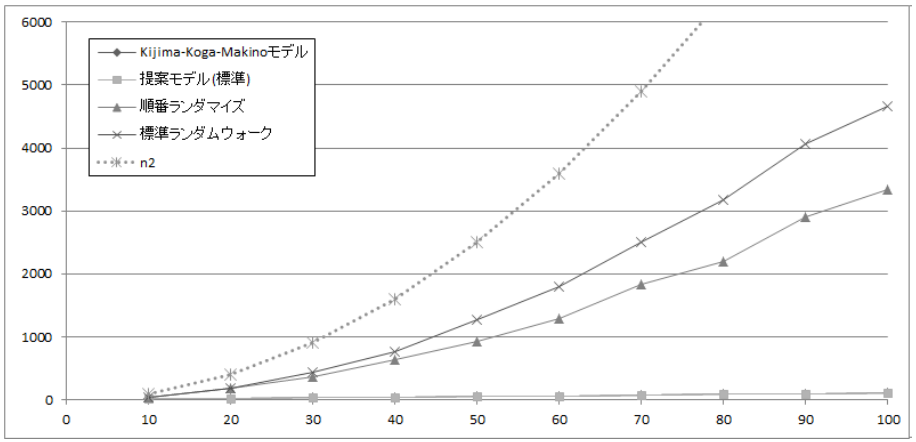

図 2 閉路グラフ

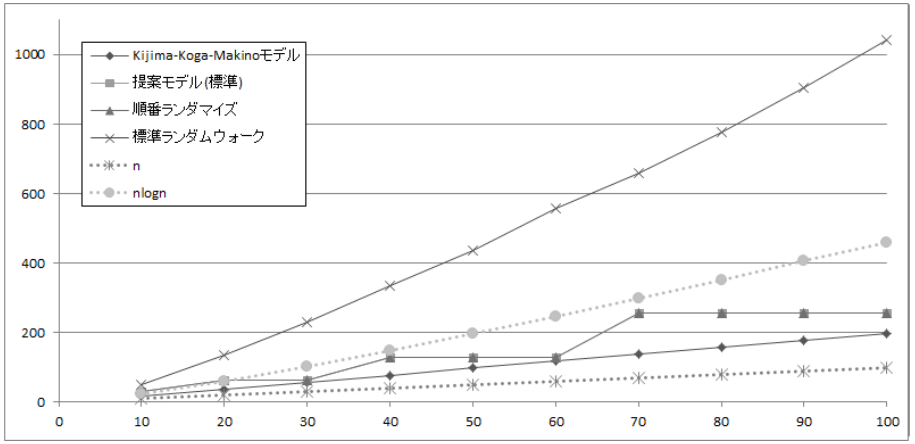

図 3 星グラフ

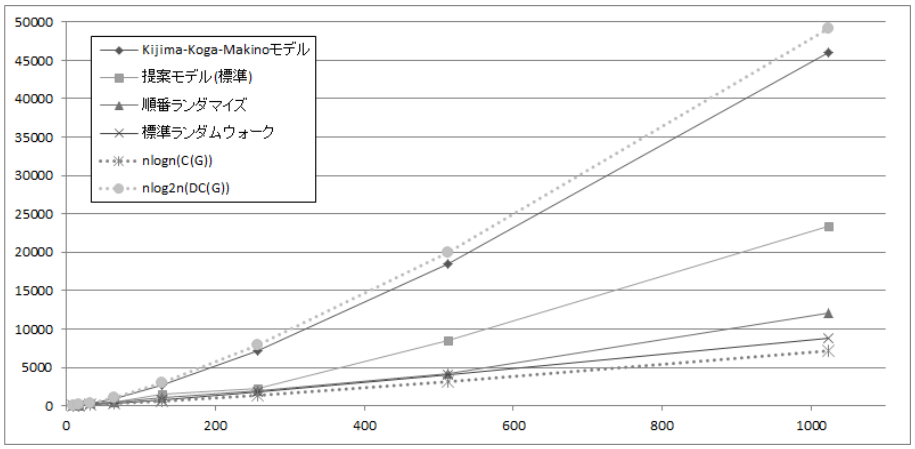

図 4 ハイパーキューブ

© 2012 Information Processing Society of Japan

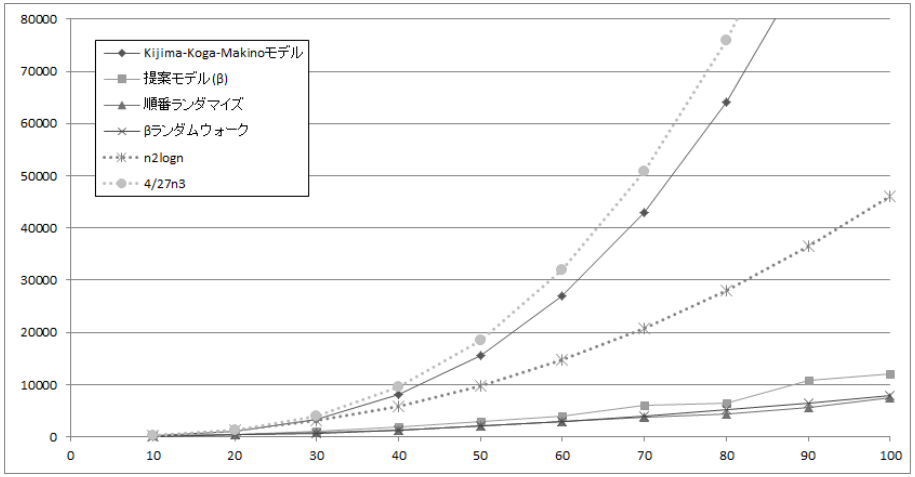

図 5 ロリポップグラフ

5.2 考　　察

完全グラフ, 閉路グラフ, 星グラフ, ハイパーキューブに関して, 結果から提案モデルは従来モデルをカバータイムの点で模倣出来ていると推測できる. また, 完全グラフと閉路グラフの実験結果を見ると, カバータイムは区間の順番の決め方に依存していることが分かる.

また, 従来モデルでは模倣出来なかった無理数の遷移確率を持つ β ランダムウォークに関して, 提案モデルで実装した結果を見ると, カバータイムの点で β ランダムウォークを模倣出来ていると推測できる.

6. おわりに

本研究では, ランダムウォークを決定的な過程で模倣出来るかどうかという試みに関し, ロータールーターモデルに対し 2 進小数を使った新たなモデルを提案した. また, このモデルの遷移比率の誤差が発射したトークン数 z に対し, $O\left(\frac{\log z}{z}\right)$ で収束することを示した. このモデルがどのような順番でトークンを発射するか, その順番の周期性に関しては今後の課題である.

提案モデルは従来モデルが有理数の遷移確率しか模倣出来なかったことに対し, 無理数の遷移確率にも対応していることから, β ランダムウォークを模倣出来る. 通常のランダムウォークでは任意のグラフに対しカバータイムは最大 $O(n^3)$ であるが, β ランダムウォークは全てのグラフについてカバータイムが $O(n^2 \log n)$ で抑えられることが示されており, 実験においては, 提案モデルでロリポップグラフに対しカバータイムは $O(n^2 \log n)$ であり, β ランダムウォークを模倣出来ていることが推測できる. 理論的な証明が今後の課題である. ロータールーターモデルのカバータームはグラフの形状, 隣接頂点にトークンを発射する順番に強く依存している. 提案モデルでも, $[0, 1)$ 区間の分割の仕方でカバータイムが大きく変わることが実験で分かるため, 分割の仕方とカバータイムの依存性も今後の課題となる.

先行研究[3] において, 従来モデルでは $n \times n$ 二次元格子状でトークンが振動し, 分布の収束しない例を設計した. 他のグラフ上での分布の収束しない例の存在についても今後の大きな課題である. 今回提案したモデルの分布について, また対応するランダムウォークとの分布の誤差については今後の課題である.

参　考　文　献

1) A. E. Holroyd and J. Propp, Rotor walks and markov chains, arXiv:0904.4507, 2009.
2) J. N. Cooper and J. Spencer, Simulating a random walk with constant error, Combinatorics, Probability and Computing, 15(2006), 815–822.
3) 白髪, 山内, 来嶋, 山下：ロータールーターモデルの周期性について, 九州支部大会
4) S. Ikeda, I. Kubo, N. Okumoto and M.Yamashita, Impact of local topological information on random walks on finite graphs, Lecture Notes in Computer Science, 2719 (2003), 1054–1067.
5) S. Kijima, K. Koga and K. Makino, Deterministic random walks on finite graphs, Proceedings of ANALCO 2012, 16–25.
6) T. Friedrich and T. Sauerwald, The cover time of deterministic random walks, Lecture Notes in Computer Science, 6196 (2010), 130–139.

© 2012 Information Processing Society of Japan